Elektrické pole ve vakuu

Přesněji řečeno, budeme se věnovat elektrostatickému poli, tj. ***silovému poli*** vyvolanému existencí klidových nábojů. (Z mechaniky ovšem víme, že pojmy klidu a pohybu jsou relativní, závisejí na volbě souřadné soustavy.)

Základní fyzikální veličinou je ***elektrický náboj*** (jednotka 1 Coulomb), který má zejména tyto důležité ***vlastnosti***:

1) Neexistuje „sám o sobě", ale je vždy spojen s hmotným objektem - ***tělesem***. (Nejmenší takové objekty jsou tzv. ***mikročástice***)
2) Je „nezničitelný" (platí zákon ***zachování*** náboje).
3) Je násobkem elementárního náboje e $=1{,}602.10^{-19}$ C (tzv. ***kvantování*** náboje)
4) Nemění se při transformacích vztažné soustavy souřadnic (***invariantnost*** náboje)
5) Účinky více nábojů se sčítají (princip ***superpozice***)
6) Silové účinky elektrického náboje popisuje ***Coulombův zákon*** , jehož základní tvar platí pro „teoretické" bodové náboje (spojené s hmotnými body):

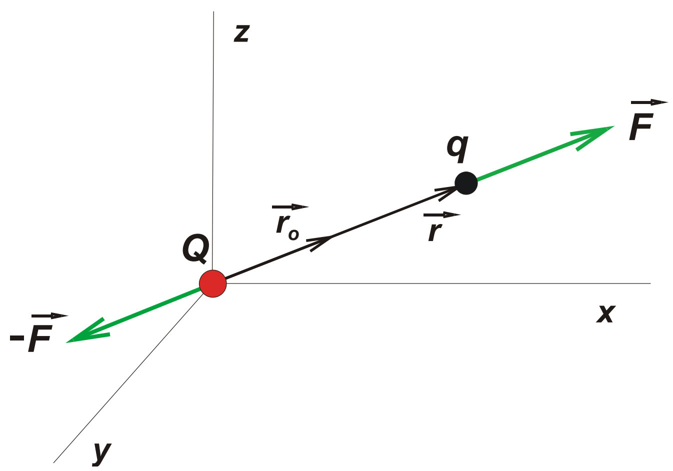
Bodový (***centrální***) náboj velikosti Q, umístěný ve vakuu v počátku soustavy souřadnic, působí na druhý bodový (***zkušební***) náboj velikosti q v místě $\vec{r}$, silou :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Coulombův zákon (1785)

kde ε_o je univerzální konstanta ***permitivita vakua*** ($\varepsilon_o = 8{,}854.10^{-12} F/m$)

a $\vec{r}_o$ je ***jednotkový vektor*** průvodiče : $\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}$



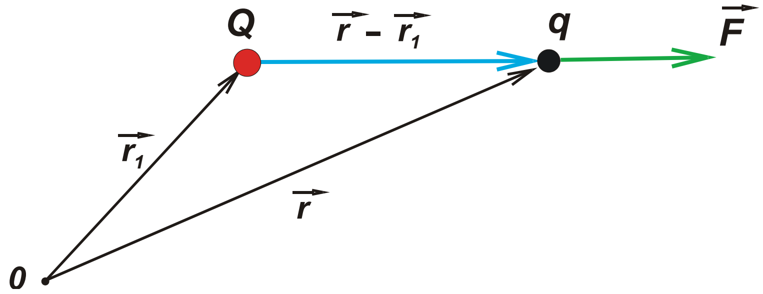
Po dosazení jednotkového vektoru dostaneme :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{r^3} \cdot \vec{r}}$$

jiný tvar Coulombova zákona

Jestliže by centrální náboj Q **nebyl v počátku souřadnic**, ale např. v místě $\vec{r}_1$ (viz obr.), pak by vztah pro sílu měl zřejmě tvar (nyní se dobře hodí poslední rovnice):

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}$$



Platí samozřejmě ***zákon akce a reakce*** : také náboj q působí na náboj Q silou - stejně velikou, ale opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}$.

Vidíme také, že Coulombův zákon je formálně (matematicky) shodný s gravitačním Newtonovým zákonem, obě síly – elektrostatická i gravitační - směřují vždy do jednoho bodu – ***<u>silového centra</u>*** a v obou případech také používáme pojem „silové pole“.

Říkáme tedy, že náboj Q vytváří ve svém (nekonečném) okolí ***<u>elektrostatické pole</u>***, které je, stejně jako gravitační pole, ***<u>centrálním</u>*** silovým polem.

Pro jeho jednoznačný popis definujeme vektorovou veličinu :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

<u>intenzita elektrického pole</u> [N/C = J/m.C = V/m]

<u>Slovní vyjádření :</u> *Intenzita elektrického pole udává (číselně) sílu působící v tomto poli na jednotkový zkušební náboj.*

Dosazením z Coulombova zákona dostaneme intenzitu el.pole, které vytváří bodový náboj Q umístěný v počátku souřadnic :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

A v případě obecné polohy náboje Q v místě $\vec{r}_1$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}$$

<u>intenzita el. pole bodového náboje Q</u>

Dále prozkoumejme, zda je elektrostatické pole ***konzervativní*** .

Pro zásadní důležitost této vlastnosti u jakéhokoliv silového pole zopakujeme potřebné výpočty a úvahy stejným způsobem a stejně podrobně, jako minulý semestr u pole gravitačního :

Vypočítejme tedy práci potřebnou k (velmi pomalému) ***přenesení*** bodového náboje q (v elektrickém poli náboje Q, který je v počátku souřadnic), po nějaké ***dráze*** (křivce) s z ***počátečního bodu*** $\vec{r}_1$ do ***koncového bodu*** $\vec{r}_2$.

Protože silové pole působí na náboj q silou $\vec{F}$, ***musíme my*** (tedy **vnější síla**) ***působit*** na náboj silou ***stejně velikou a opačně orientovanou*** , tj. $-\vec{F}$, abychom sílu pole ***překonali***

Pozn. : Přesněji vzato, musíme působit ještě malou přídavnou silou navíc pro uvedení tělesa do pohybu, kterou lze ale v limitě - při požadavku velmi pomalého posunu - zřejmě zanedbat.

Tedy základní vztah pro práci vykonanou vnější silou v silovém poli při pohybu náboje (tělesa) na dráze s proto bude :

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

práce vnější síly v silovém poli *(obecně)*

Pozn.: Je zřejmé, že stejný integrál, ale bez záporného znaménka, by vyjadřoval ***práci silového pole*** .

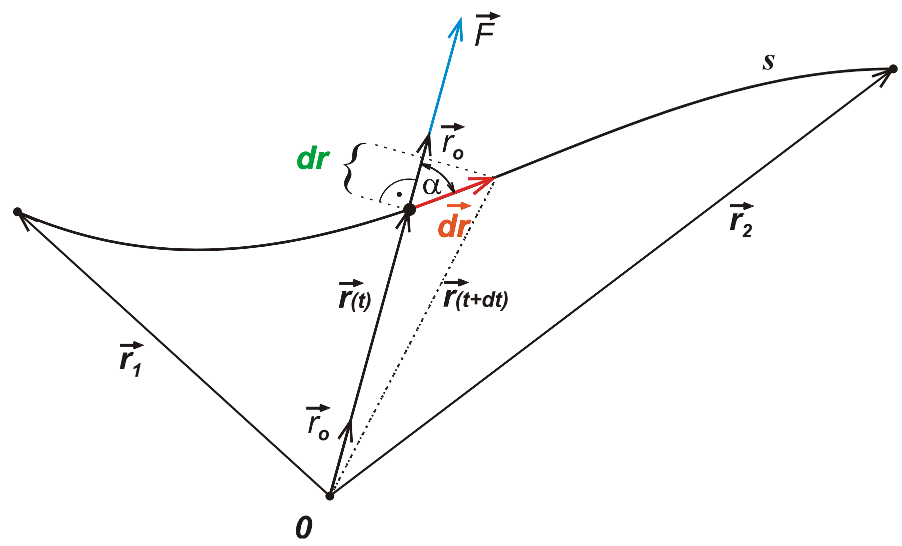
Nyní dosadíme konkrétně za elektrostatickou sílu z Coulombova zákona a vytkneme konstanty :

$$A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_o\right) \cdot d\vec{r} = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_o \cdot d\vec{r}$$

Situace při výpočtu práce je znázorněna na obrázku – a je naprosto stejná jako byla u gravitačního pole.

Upravíme dále skalární součin v integrálu, přitom využijeme známé velikosti jednotkového vektoru:

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} = |\vec{r}_o| \cdot |d\vec{r}| \cdot cos\alpha = 1 \cdot |d\vec{r}| \cdot cos\alpha$$



Z obrázku je vidět, že tento skalární součin je **kolmým průmětem** diferenciálu průvodiče $d\vec{r}$ do směru průvodiče $\vec{r}$ (do směru jeho jednotkového vektoru) a že je tedy vlastně roven ***diferenciálu*** (přírůstku) velikosti průvodiče dr :

$$\boxed{\vec{r}_o \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = dr}$$

!!! Je tedy $dr \neq |d\vec{r}|$, i když $r = |\vec{r}|$

Tím se výrazně zjednoduší výpočet vykonané práce, neboť výraz již neobsahuje vektorové veličiny a jde o jde o jednoduchý známý integrál :

$$A = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o \cdot r_2} - \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o \cdot r_1}$$

Z výsledku vidíme, že vykonaná práce vůbec nezávisí na dráze (na jejím tvaru), ale závisí pouze na počátečním a koncovém bodu dráhy.

Dále si představme, že bychom umožnili **zpětný pohyb** tělesa z koncového bodu do bodu počátečního a již bychom tento pohyb nijak neovlivňovali, tj. nechali bychom **pracovat sílu elektrického pole** - pak by vykonaná práce byla **stejně veliká** – a my tak svoji původně vykonanou práci „**dostaneme zpět**“ :

$$\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = A$$

Tedy **vnější silou původně vykonaná práce** A je jakoby uschována - **zakonzervována** v koncovém bodu dráhy $\vec{r}_2$ a **náboj** *(těleso)* má v tomto místě **schopnost** vykonat **stejně velikou práci** (při návratu do výchozího místa).

Silové pole s takovou význačnou vlastností, která umožňuje zachování, zakonzervování vykonané práce, se nazývá *konzervativní silové pole* .

Obě centrální silová pole - elektrostatické i gravitační – jsou tedy konzervativní.

Schopnost náboje (tělesa) vykonat práci , spojená s jeho (koncovou) **polohou** , se pak nazývá ***potenciální energie*** a její **velikost** se definuje jako **velikost této práce** (tj. práce vykonané tělesem při přesunu do polohy počáteční).

*Pozn.: Tuto práci **spojujeme s daným nábojem** (tělesem), v principu ji ovšem konají **síly pole**………..*
*……. a rovná se také práci **nejprve vykonané vnější silou** - při původním pohybu z počátečního do koncového bodu).*

Protože vykonaná práce nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body, počátečním a koncovým, je potenciální energie **jednoznačnou funkcí místa** $\vec{r}_2$ (tento koncový bod původně zvolené dráhy je ovšem jako obecně **proměnná** veličina ve funkci zcela **libovolným** bodem v prostoru, píšeme ho tedy obecně dále **bez indexu**) a samozřejmě je **také funkcí druhého místa** $\vec{r}_1$

(zde je namístě ponechání indexu, neboť tento bod je sice také obecně zcela libovolný, ale při řešení daného problému se ***předem zvolí*** *a ve funkci dále vystupuje jako konstanta, matematicky to je vlastně* ***parametr*** *funkce).*

Bodový náboj q má tedy v daném místě $\vec{r}$ vzhledem k místu $\vec{r}_1$ potenciální energii :

$$\boxed{W_p(\vec{r},\vec{r}_1) = A = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o r} - \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o r_1}}$$

elektrostatická potenciální energie *(obecný tvar)*

Slovní vyjádření : *je to práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu náboje q (tělesa) z daného místa $\vec{r}$ do zvoleného výchozího místa $\vec{r}_1$ a je to také práce , kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu náboje opačným směrem - z výchozího místa do daného místa.*

V teoretických výpočtech se často – stejně jako u gravitačního pole - pro potenciální energii volí výchozí místo v nekonečnu , tj.:

$$\boxed{r_1 \to \infty}$$

V této limitě je potom druhý člen ve vztahu pro potenciální energii nulový - zbavíme se tak závislosti na počátečním stavu náboje q (tělesa) (na jeho počátečním místě) a dostáváme velmi jednoduchý tvar :

$$\boxed{W_p(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o r}}$$

elektrostatická potenciální energie *(speciální tvar)*

Stanovme opět význam : *je to práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu náboje q (tělesa) z daného místa $\vec{r}$ do nekonečna a je to také práce, kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu náboje z nekonečna do daného místa.*

Poslední vztah je také výhodný, že hned vidíme, jak snadno můžeme zapsat ***původní vykonanou práci*** (vnější silou) při přesunu náboje q mezi dvěma místy :

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)}$$

Práce potřebná pro přemístění náboje q mezi dvěma místy v silovém poli je tedy rovna *rozdílu potenciálních energií* mezi těmito místy.

Pozn.: Formálně stejný vztah platí i při použití $W_p(\vec{r},\vec{r}_1)$ - tj. při jakékoliv volbě výchozího místa $\vec{r}_1$,

zkuste sami dokázat

Nyní definujeme fyzikální veličinu elektrostatický potenciál :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{W_p(\vec{r})}{q}}$$

elektrostatický potenciál [J / C] = [V]

Slovní vyjádření : *Je to potenciální energie (zkušebního) jednotkového náboje (nebo-li práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu jednotkového náboje z daného místa do výchozího místa - nekonečna a je to také práce, kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu náboje z nekonečna do daného místa.*

Stejně jako potenciální energie je i potenciál samozřejmě ***jednoznačnou funkcí*** místa. Dosaďme ještě za W_p z její definice jako vykonané práce :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{q} \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

A dostáváme tak zásadní vztah mezi **dvěma nejdůležitějšími veličinami** elektrostatického pole.

Pozn.: *Tento vztah odpovídá slovnímu vyjádření potenciálu – jako práce potřebné k přenesení jednotkového náboje z nekonečna na dané místo - neboť ve výrazu pro práci vystupuje nyní přímo elektrická intenzita, tedy síla působící na jednotkový náboj :*

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

vyjádření potenciálu jako práce intenzity pole

A nakonec dosaďme za potenciální energii W_p její konkrétní tvar pro bodové náboje:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{q} \cdot \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

potenciál bodového náboje

D.cv.: Jak bychom pozměnili tento vztah, když by náboj Q nebyl v počátku soustavy souřadnic ? (Viz také odstavec „Zobecnění Coulombova zákona)

Pozn. : Namísto $W_p(\vec{r})$ *lze samozřejmě použít* $W_p(\vec{r},\vec{r}_1)$

A nyní upravíme naposled získaný vztah (viz předchozí stránka) pro práci A vykonanou při přemístění náboje q z místa $\vec{r}_1$ do místa $\vec{r}_2$, tj. :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)$$

Do této rovnice dosadíme z definice potenciálu :

$$W_p(\vec{r}) = q \cdot \varphi(\vec{r})$$

A obdržíme :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = q\cdot\varphi(\vec{r}_2) - q\cdot\varphi(\vec{r}_1) = q\cdot[\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)] = q\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Použijme pouze první integrál a poslední výraz a vytvoříme tak vztah :

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = q\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Rovnici vydělíme nábojem a ještě využijeme definici intenzity. Vznikne tak velmi užitečný vztah pro rozdíl potenciálů :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Tento rozdíl potenciálů je vlastně ***přírůstkem potenciálu*** mezi místy 1 a 2 (rozdíl hodnot funkce v koncovém a počátečním bodě) a vidíme, že je roven ***práci vnější síly*** (intenzity) při přesunu jednotkového náboje mezi těmito místy.
Ukázalo se, že rozdíl potenciálů je - zejména v praktické elektrotechnice - velmi důležitou veličinou a získal i zvláštní název ***napětí*** .

Přesněji: ***elektrické napětí mezi místy*** $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ se definuje jako ***úbytek potenciálu*** mezi těmito místy :

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

elektrické napětí mezi místy $\vec{r}_1$ ***a*** $\vec{r}_2$

Slovní vyjádření : *Elektrické napětí mezi místy 1 a 2 je rovno práci, kterou vykoná el. pole při přesunu jednotkového náboje z místa 1 do místa 2.*

Pomocí této fyzikální veličiny je pak možno nejjednodušším možným způsobem vyjádřit práci potřebnou pro přemístění náboje q z z místa 1 do místa 2 :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = q\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = q\cdot U_{21}$$

Tedy :

$$\boxed{A = q\cdot U_{21}}$$

práce potřebná pro přemístění náboje q mezi místy 1 a 2

Jak vidíme, tato práce je samozřejmě q-krát větší než práce potřebná pro přemístění jednotkového náboje (což je napětí) mezi těmito místy.

(konec otázky) **(K.Rusňák 11/05, uprav. 10/20)**