Další vlastnosti konzervativního. pole

Z minulé kapitoly ***již víme***, že :

- silové (elektrické) pole nazýváme konzervativní, když vykonaná práce nezávisí na tvaru dráhy a „neztrácí se“, ale je „zakonzervována“ v poloze náboje a mohu ji dostat zpět (při zpětném pohybu)
- pak existuje potenciální energie (a potenciál)

Platí to i opačně (zkuste za D.cv.) :

- když existuje potenciální energie (a potenciál) - pak silové pole je konzervativní

Celkem tedy : ***Existence potenciálu je ekvivalentní konzervativnosti el. pole***

V následujicim textu ale ještě odhalíme ***další důležité vztahy***, které budou rovněž ekvivalentní konzervativnosti pole:

Nejprve použijme vztah pro rozdíl potenciálů získaný koncem minulé kapitoly:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; \varphi_2-\varphi_1 \;=\; \varphi(\vec{r}_2)-\varphi(\vec{r}_1)$$

Pravá strana vypadá jako výsledek určitého integrálu z přírůstku funkce φ mezi místy $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$, tedy :

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi$$

Z rovnosti stejných integrálů pak plyne rovnost integrovaných funkcí :

$$\boxed{d\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

diferenciální přírůstek potenciálu

Vidíme, že tento nekonečně malý, elementární, diferenciální přírůstek potenciálu se realizuje na diferenciální dráze, tj. při nekonečně malé změně polohy bodového náboje.

Uvažme dále, že ***potenciál je funkce místa***, tj. funkce tří prostorových souřadnic :

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x,y,z)$$

a vyjádřeme diferenciální přírůstek potenciálu na levé straně rovnice známým ***matematickým výrazem*** :

$$d\varphi \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot dz \;=\; grad\,\varphi\cdot d\vec{r}$$

Porovnáním s pravou stranou předchozí rovnice pak dostaneme ***další ekvivalentní vztah*** konzervativnosti elektrostatického pole (promyslete jeho zpětnou implikaci) :

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi}$$

vztah intenzity a potenciálu elektrického pole (diferenciální)

Tato rovnice vyjadřuje jednoznačný vztah vektorové intenzity pole a skalárního potenciálu.

Silové elektrické pole, definované (popsané) vektorovou veličinou - intenzitou (jako silou na jednotkový náboj) je tedy možno daleko jednodušeji popisovat pouze skalární funkcí – potenciálem.

(A v případě potřeby lze použitím uvedené rovnice kdykoliv přejít k intenzitě pole.)

A co dalšího ještě plyne z poslední rovnice, v níž se počítá intenzita z derivací potenciálu ?

- pro ***určité elektrické pole***, tj. pro ***jedinou elektrickou intenzitu*** v daném místě existuje ***nekonečně mnoho možných potenciálů*** , které se navzájem mohou ***lišit o libovolnou konstantu*** (její derivace je nulová).

*To je ovšem v souladu se **obecným** vztahem pro potenciál bodového náboje (potenciální energii, viz dříve), který obsahuje **výchozí polohu jako parametr** – tim se vnáší do vztahu konstantní hodnota potenciálu výchozí polohy*

Zopakujme si dále pro úplnost, co známe z matematiky o operátoru gradient :

Nejprve definice :

$$grad\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

To lze formálně zapsat :

$$\boxed{grad\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla\varphi}$$

V tomto vztahu jsme použili matematický formální vektor – operátor nabla:

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

operátor nabla

A nakonec ještě **praktický význam** operátoru gradient :

$\boxed{grad\,\varphi}$ **určuje směr největšího růstu funkce φ – tj. kolmice k jejím ekvipotenciálním plochám**

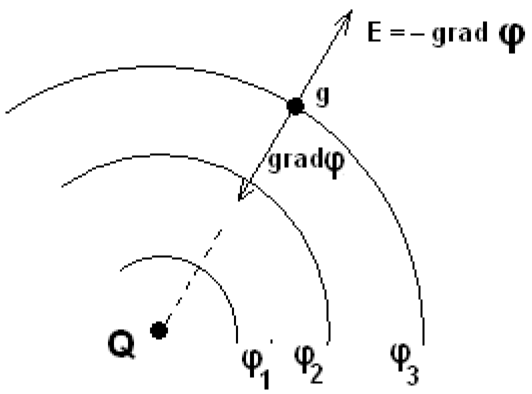
Například **ekvipotenciální plocha potenciálu** bodového náboje má rovnici :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} = konst.$$

Jejím řešením je rovnice kulové plochy :

$$r = konst.$$

Úkol: Doplňte nerovnosti mezi potenciály tří kulových ploch na obrázku.
a uvažte, že vektor gradientu směřuje do středu kulové plochy - do náboje a intenzita el. pole leží na stejné přímce



Dále se vraťme k základní vlastnosti elektrostatického pole – že práce vnější síly mezi body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nezávisí na dráze, což je možno zjednodušeně napsat:

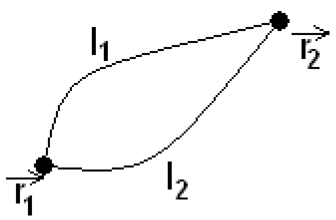
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = konst.$$

Po vydělení rovnice $(-q)$ pak nezávisí na dráze ani integrál

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = konst$$

Jestliže tedy zvolíme mezi body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ dvě různé křivky (dráhy) l_1 a l_2, bude:

$$\int_{\vec{r}_1(l_1)}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1(l_2)}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$



V integrálu na pravé straně přehodíme meze (tím změní znaménko) a převedeme ho na levou stranu (opět změní znaménko) :

$$\int_{\vec{r}_1(l_1)}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2(l_2)}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

Součet integrálů na levé straně je dohromady integrál po uzavřené křivce $l = l_1 + l_2$:

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

Křivky l_1 a l_2 jsou libovolné , proto také výsledná křivka l je libovolná a vztah tedy platí pro **jakoukoliv uzavřenou křivku** (nepíšeme tedy žádné její označení) – je to ***další ekvivalentní vztah*** konzervativnosti elektrostatického pole (promyslete jeho zpětnou implikaci) :

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0}$$

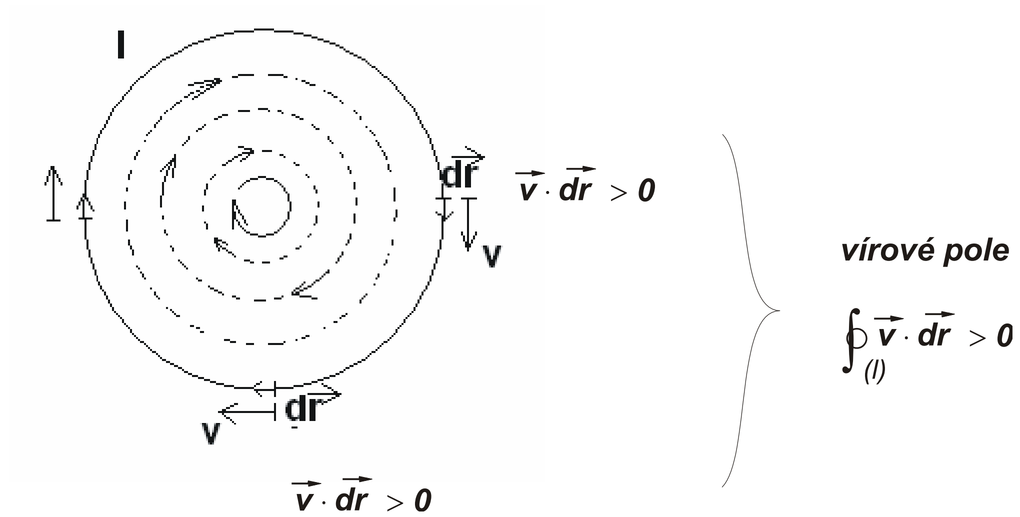
nevírovost el. pole

Pojem nevírovosti pochází z ***hydrodynamiky*** , kde se v **poli rychlosti** $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ často zkoumá hodnota integrálu - tzv. ***cirkulace vektoru rychlosti*** po uzavřené křivce l :

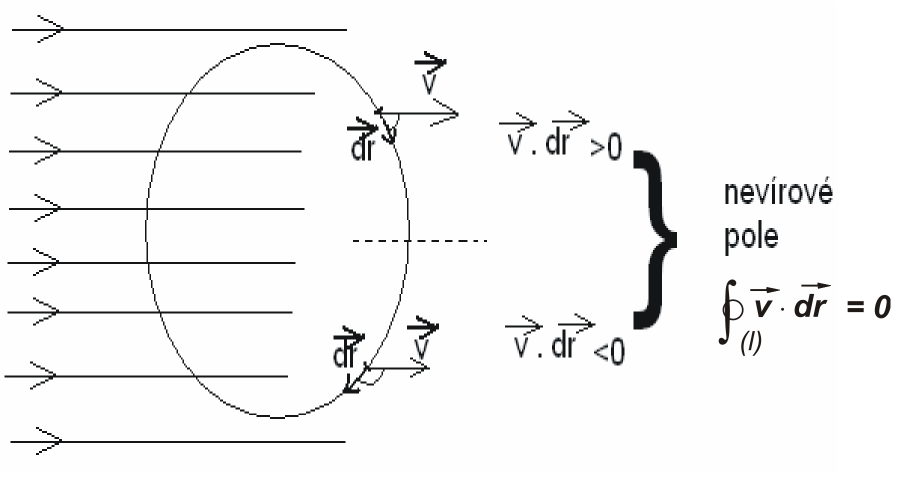
$$\oint_{(l)} \vec{v}\cdot d\vec{r}$$

Význam tohoto integrálu vyplyne z následujících dvou příkladů :

1) Jestliže v nějakém místě kapaliny ***existuje vír*** (např. kolem výpusti, jako důsledek Coriolisovy síly), potom zřejmě platí – viz. obr.:



2) Jestliže v kapalině ***neexistují víry*** – např. když probíhá laminární proudění, potom je situace zcela jiná :



Pojmy ***cirkulace vektoru*** *,* ***vírové pole*** *a* ***nevírové pole*** *potom formálně používáme v jakémkoliv vektorovém poli, i v případě, když nepopisuje žádný reálný pohyb hmoty.*

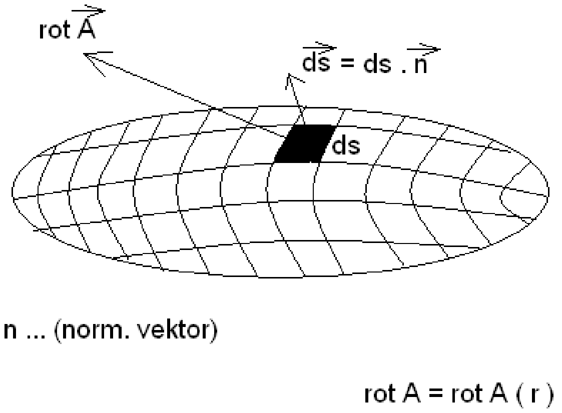
Uveďme dále matematickou ***Stokesovu větu*** [stouksovu], která se často používá pro úpravu integrálů typu „cirkulace vektoru“ :

Nechť S je spojitá plocha ohraničená spojitou uzavřenou křivkou l .

Pak pro libovolnou spojitou vektorovou funkci polohy, tj. :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \left(A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z) \right)$$

Platí vztah :



$$\boxed{\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{r} \;=\; \iint_S rot\,\vec{A}\cdot d\vec{S}}$$

kde $d\vec{s}$ je orientovaný vektor plochy (viz. obr.)

a $rot\,\vec{A}$ je ***matematický operátor*** ***rotace vektoru*** $\vec{A}$,

který je definovaný vztahem:

$$rot\,\vec{A} \;=\; \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\;,\;\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\;,\;\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

To lze formálně zapsat opět pomocí operátoru nabla, který byl již použit u gradientu :

$$\boxed{rot\,\vec{A} \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_x,A_y,A_z\right) \;=\; \nabla\times\vec{A}}$$

Zcela evidentně nejde o triviální operátor, pokusme se dále určit nějaký jeho názorný, ***fyzikální smysl*** :

Napišme Stokesovu větu, za předpokladu splnění jejích podmínek :

$$\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

A představme si, že ***zmenšujeme*** velikost ohraničené plochy S, matematicky až ***v limitě*** $S \rightarrow 0$.

Pak ovšem není potřeba dělit tuto již malou plochu na malé části (a provádět integraci) a pravou stranu můžeme napsat v přibližném tvaru

(a současně vyjádříme vektor plochy pomocí normálového vektoru) :

$$\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{r} \;\cong\; rot\,\vec{A}\cdot\vec{S} \;=\; rot\,\vec{A}\cdot\vec{n}\cdot S$$

Vydělením velikostí plochy osamostatníme skalární součin, rovnost platí ovšem exaktně až v limitě :

$$\boxed{rot\,\vec{A}\cdot\vec{n} \;=\; \lim_{S\to 0}\frac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}}{S}}$$

Na pravé straně je podíl cirkulace vektoru a velikosti plochy (kolem které cirkulace probíhá) - tedy je to cirkulace vektoru připadající na jednotkovou plochu (kolem jednotkové plochy) ….

.... lze také použít názvu ***plošná hustota cirkulace*** .

Skalární součin na levé straně pak vyjadřuje kolmý průmět vektoru $rot\,\vec{A}$ do směru normály k ploše S. Uvážíme-li, že vektor $rot\,\vec{A}$ je jednoznačně určen svým místem (je to funkce polohy), potom **velikost** tohoto průmětu závisí jedině na naší ***volbě plochy*** S a kolmý průmět vektoru bude tedy ***maximální*** a rovný velikosti vektoru v případě ***plochy kolmé*** na tento vektor.

Shrňme tyto poznatky o významu operátoru rotace :

- vektor $rot\,\vec{A}$ má směr normály k ploše, kolem které je maximální cirkulace vektoru $\vec{A}$

- a jeho velikost je rovná plošné hustotě cirkulace vektoru $\vec{A}$

Vraťme se od matematiky k elektrickému poli a upravme nyní náš vztah nevírovosti el. pole:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Intenzita elektrického pole je jistě spojitá funkce polohy a spojitou uzavřenou křivku u cirkulace intenzity můžeme považovat za hranici nějaké libovolné spojité plochy S - pak na levou stranu můžeme aplikovat Stokesovu větu a dostaneme :

$$\iint_S rot\,\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Protože S je ***libovolná*** (ohraničená) plocha v prostoru, vyplývá z nulového integrálu také nulovost integrované funkce a dostáváme tak ***další ekvivalentní vztah*** konzervativnosti elektrostatického pole (promyslete jeho zpětnou implikaci) :

$$\boxed{rot\,\vec{E} = 0}$$

nevírovost elektrostatického pole – dif. tvar

D.cv.:

Po dosazení do tohoto vztahu za el. intenzitu:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi$$

Získáme rovnici :

$$\boxed{rot\,grad\,\varphi \;=\; 0}$$

Pokuste se najít řešení této rovnice (podmínky platnosti) !

Závěrem můžeme konstatovat :

Konzervativnost je základní vlastností silového pole – umožňuje uchování vykonané práce ve formě potenciální energie hmotných objektů.

V této kapitole jsme prozkoumali konzervativní elektrostatické pole a poznali jsme, že jeho konzervativnost lze jednoznačně vyjádřit také následujícími ***ekvivalentními vztahy*** :

$$\boxed{el.\ pole\ je\ konzervativní}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{existuje\ potenciál\ \varphi}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad\ \varphi}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = konst}$$ (nezávisí na dráze)

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{rot\ \vec{E} = 0}$$

Ekvivalenci těchto vztahů lze dobře využít při zkoumání jakéhokoliv silového pole – zjistíme-li platnost libovolné uvedené rovnice, pak toto pole je konzervativní (nebo není konzervativní při její neplatnosti).

(konec otázky) **(K.Rusňák 2/06, uprav. 10/20)**