

Gaussův zákon elektrostatiky

V elektrostatickém poli nyní stanovíme hodnotu určitého integrálu :

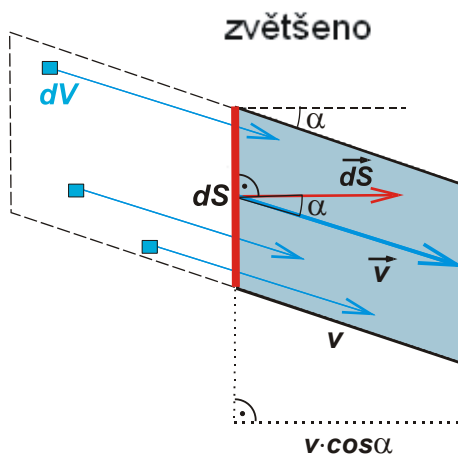
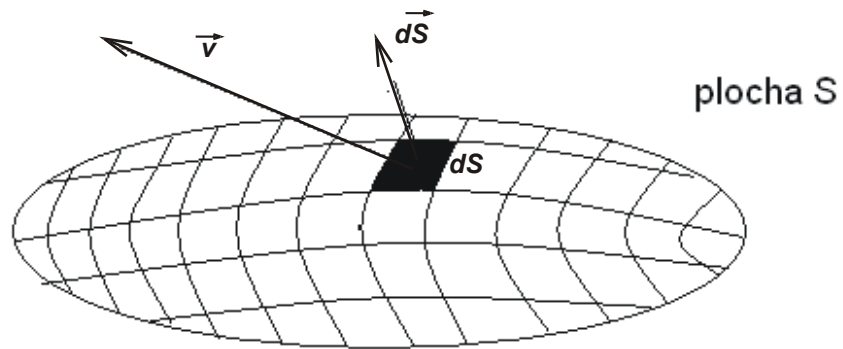
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

tok (vektoru) elektrické intenzity uzavřenou plochou S

Toto pojmenování opět pochází z hydrodynamiky, kde se často počítá analogický integrál pro vektor rychlosti kapaliny, přes plochu, která obecně nemusí být uzavřená (jen spojitá) :

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Podívejme se, s pomocí následujícího obrázku, jaký je význam tohoto integrálu :



Částice kapaliny při svém pohybu protínají zvolenou plochu S . Zvětšený obrázek malé (diferenciální) části plochy dS spolu s vektorem rychlosti v daném místě nám pomůže stanovit důsledek tohoto pohybu : uvědomíme-li si, že dráha částice za jednotku času je číselně rovna její rychlosti, je pak jasné, že veškerá kapalina protéká za jednotku času přes tuto malou plošku dS musí vyplnit objem (viz. obr):

$$dS \cdot v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

A celkový objem kapaliny proteklý za 1 času přes celou plochu S získáme sečtením – integrací – těchto výrazů přes plochu S :

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

objemový tok kapaliny

Proto se každý integrál ve tvaru :

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

nazývá tok vektoru \vec{A} plochou S , i když se opět - stejně jako u obecné cirkulace vektoru – nemusí jednat o reálný pohyb hmoty.

Uved'me dále matematickou větu, která se ve fyzice velmi často používá pro úpravu integrálů typu „tok vektoru“ :

Nechť V je objem uzavřený spojitou plochou S (tzv. uzavřená plocha), pak pro libovolnou spojitou vektorovou funkci polohy, tj. :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$$

platí vztah :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV$$

Gaussova (-Ostrohradského) věta matematiky

kde $d\vec{S}$ je orientovaný vektor plochy a $\operatorname{div} \vec{A}$ je matematický operátor divergence vektoru \vec{A} .

Zopakujme si dále – stejně jako u předchozích operátorů gradient a rotace - matematické znalosti o operátoru divergence. Nejprve jeho definice :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

divergence vektoru

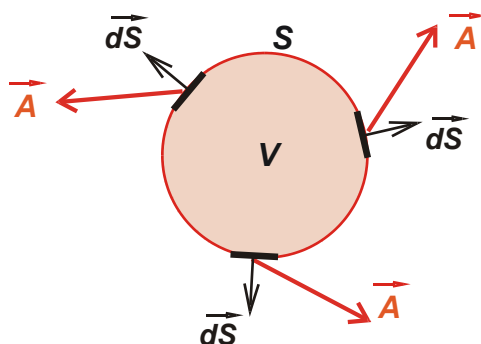
Vidíme, že divergence vytvoří z vektoru (z vektorové funkce) funkci skalární.

Definici lze formálně zapsat opět pomocí známého operátoru nabla, který byl již použit u operátorů gradient a rotace :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x, A_y, A_z) = \nabla \cdot \vec{A}$$

Fyzikální význam lze u tohoto operátoru stanovit kupodivu velmi snadno : Napišme Gaussovu větu matematiky, za předpokladu splnění jejích podmínek :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV$$



A představme si, že uzavřený objem V zmenšujeme, matematicky až v limitě $V \rightarrow 0$.

Potom ovšem není potřebné pro integraci dělit takový objem na (nekonečně) malé části, neboť on sám je (nekonečně) malý, a hodnotu integrálu na pravé straně můžeme ihned (přibližně) vyjádřit ve tvaru :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV \doteq \operatorname{div} \vec{A} \cdot V$$

Pozn. : Uvažte s pomocí obrázku, že u plošného integrálu na levé straně rovnice ale podobné přibližné vyjádření není možné.

Divergenci nyní můžeme v rovnici osamostatnit - rovnost bude ovšem platit přesně jen ve výše uvedené limitě :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{V} = \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})$$

Tato limita, ve které se objem V zmenší až do nuly - tj. do bodu, nám dobře ukazuje, že $\operatorname{div} \vec{A}$ je (skalární) funkcí polohy (místa).

Pokusme se dále určit smysl pravé strany :

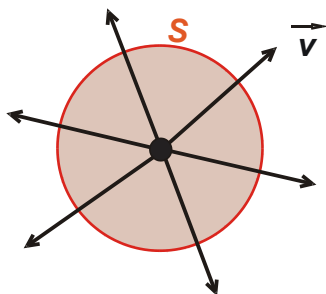
- tok vektoru přes uzavřenou plochu je vlastně výtoku vektoru z daného objemu V (předpokládáme kladné hodnoty integrálu, tj. $\vec{A} \cdot d\vec{S} \geq 0$, viz. obr.)
- děleno objemem V znamená přepočítání na jednotkový objem tedy výtoku z jednotkového objemu

Divergence vektoru \vec{A} je (číselně) rovna výtoku vektoru \vec{A} z jednotkového objemu v daném místě.

Speciálně, kdyby se jednalo o kapalinu ($\vec{A} = \vec{v}$), pak případ nenulové divergence znamená, že v daném místě je zdroj (zřídlo) kapaliny :

$$\text{div } \vec{A} \neq 0$$

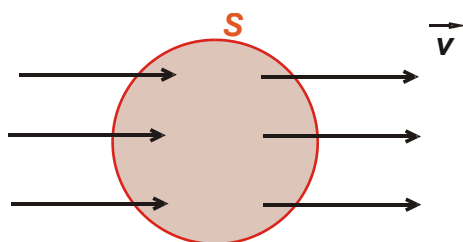
zřídlové pole



Nulová divergence pak samozřejmě popisuje kapalinu bez zdrojů :

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

nezřídlové pole



Pojmy *zřídlové pole* a *nezřídlové pole* potom opět formálně používáme v jakémkoli vektorovém poli, které i nepopisuje žádný reálný pohyb hmoty (například v silovém poli).

Nyní se vraťme k elektrostatice:

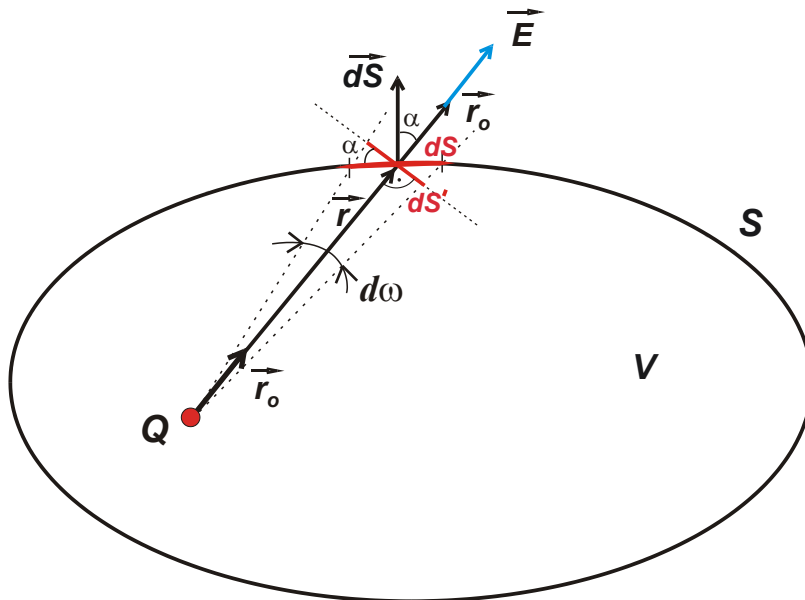
Předpokládejme nejprve nejjednodušší možný případ, kdy elektrické pole by bylo způsobeno jediným bodovým nábojem Q a vypočítejme tok elektrické intenzity - tj. hodnotu určitého integrálu :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Rozlišíme pak dvě možné polohy tohoto náboje vzhledem ke zvolené ploše :

1) Necht' náboj Q leží uvnitř plochy S , tj. v objemu V :

Položme pak do místa náboje počátek soustavy souřadnic a do integrálu dosadíme dříve odvozený vztah pro elektrickou intenzitu bodového náboje :



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_o \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S \frac{\vec{r}_o \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Skalární součin v čitateli vypočítáme pomocí známého matematického vztahu, se znalostí velikosti jednotkového vektoru a s využitím geometrických vztahů (viz obr.) :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{S} = 1 \cdot dS \cdot \cos\alpha = dS'$$

Tento skalární součin tedy vyjadřuje průmět plošky dS do roviny kolmé k průvodiči v daném místě - a velikost tohoto průmětu je označena dS' .

Dosaďme zpět do integrálu a uvažme, že diferenciální plošku na výše uvedené rovině kolmé k průvodiči si lze představit i na kulové ploše poloměru velikosti průvodiče r . Pak za integrálem vznikl výraz, který je přímo podle matematické definice prostorovým úhlem, pod kterým je vidět z místa náboje ploška dS (a rovněž ploška dS'). Integrál, tj. součet těchto úhlů přes uzavřenou plochu S , má potom zřejmě hodnotu celého prostorového úhlu, tedy 4π steradiánů :

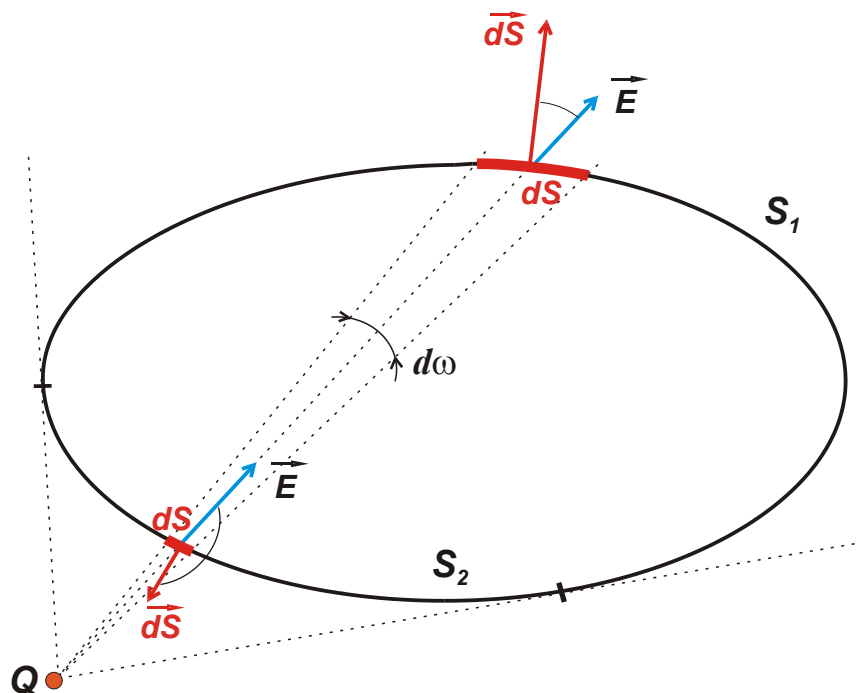
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oiint_S d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Velikost toku elektrické intenzity tedy překvapivě vůbec nezávisí na poloze náboje Q (uvnitř plochy S).

2) Dále uvažme situaci, kdy bodový náboj leží vně plochy S :

Postup výpočtu musí být zajisté principiálně stejný, tzn. za integrálem opět vznikne prostorový úhel odpovídající diferenciálnímu elementu plochy. Z obrázku však vidíme, že tento prostorový úhel je vždy

společný dvěma ploškám na „protilehlých“ částech S_1 a S_2 dané uzavřené plochy (kromě limitní situace na tečnách, kdy je samozřejmě tento úhel nulový, viz obr.) :



Integrál je ovšem (limitní) součet, nezáleží tedy na pořadí „sčítanců“, a mohu proto sčítat – integrovat – po těchto dvojicích protilehlých plošek. Uvažme ale ještě, že vektor „dolní“ plošky (viz obr.) je protilehlý vektoru intenzity (svírají úhel větší než pravý), a proto je jejich skalární součin a tedy i hodnota prostorového úhlu záporná (a stejně veliká jako pro „horní“ plošku) :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_S d\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{S_1} d\omega + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{S_2} -d\omega$$

Po vytknutí – a tím vlastně aplikujeme uvedené sčítání po dvojicích - tak dostáváme jednoznačný výsledek:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{S_1, S_2} (d\omega - d\omega) = 0$$

Velikost toku elektrické intenzity uzavřenou plochou tedy ani v tomto případě (náboj vně plochy) nezávisí na jeho poloze a je vždy nulová.

Získané výsledky nyní zobecníme pro soustavu více nábojů :

Jestliže v prostoru zvolíme libovolnou uzavřenou plochu, pak jistě nějaké náboje budou uvnitř této plochy a ostatní zůstanou vně :

Nechť tedy uvnitř uzavřené plochy jsou náboje : Q_1, Q_2, Q_3, \dots

A vně této plochy necht' leží náboje : Q_1', Q_2', Q_3', \dots

Pro každý z těchto nábojů nyní napíšeme Gaussův zákon :

$$\oiint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

⋮

$$\oiint_S \vec{E}'_1 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{E}'_2 \cdot d\vec{S} = 0$$

⋮

A všechny tyto rovnice sečteme dohromady , tj. sečteme dohromady jejich levé i pravé strany :

$$\oiint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 \dots) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (Q_1 + Q_2 + \dots)$$

V závorce na levé straně je součet intenzit od všech nábojů, tedy intenzita výsledného elektrického pole celé naší soustavy nábojů :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 \dots$$

Na pravé straně rovnice je ovšem součet pouze těch nábojů, které leží ve vnitřku uzavřené plochy, tj.

celkový náboj uvnitř plochy S :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

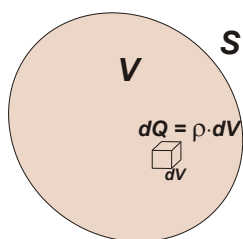
Dostáváme tak obecný vztah :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gaussův zákon elektrostatiky (integrální tvar)

Slovní vyjádření : Tok vektoru výsledné intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou je určen celkovým nábojem uvnitř této plochy.

Ve skutečnosti jsou ovšem elektrické náboje rozloženy na různých tělesech uvnitř uzavřené plochy – předpokládejme ihned nejobecnější případ náboje spojitě rozloženého s hustotou ρ v celém vnitřním objemu V této plochy :



Pak vyjádříme celkový náboj Q uvnitř plochy S :

$$Q = \iiint_V dQ = \iiint_V \rho dV$$

a dosadíme ho do Gaussova zákona :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_V \rho dV$$

Levou stranu ještě upravíme pomocí Gaussovy věty matematiky :

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_V \rho dV$$

Porovnáním obou stran dostaneme rovnost integrovaných funkcí :

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Gaussův zákon elektrostatiky (diferenciální tvar)

Při znalosti smyslu operátoru divergence dobře pochopíme, že diferenciální tvar Gaussova zákona popisuje situaci v daném místě (bodu) elektrického pole, ale má stejný fyzikální význam jako jeho integrální tvar - divergence na levé straně přece znamená výtok elektrické intenzity z jednotkového objemu (tj. přes plochu obklopující 1 objem)a na pravé straně je objemová hustota náboje, tj. náboj obsažený (uvnitř) právě v tomto jednotkovém objemu.

Jestliže tedy například nějaké místo elektrického pole je bez nábojů , tj. $\rho = 0$, potom je nulová divergence, tedy :

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = 0}$$

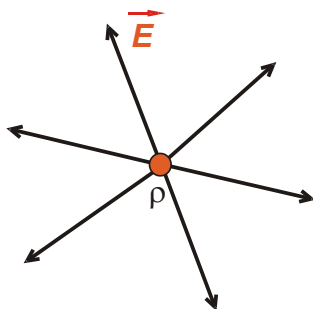
pole je nezřídlové

Ale v případě, že v daném místě **jsou elektrické náboje**, tj. $\rho \neq 0$, potom ovšem bude :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} \neq 0}$$

pole je zřídlové

Můžeme proto tvrdit, že *elektrické náboje jsou zřídla (zdroje) elektrického pole*.



(Vektory vycházející ze zdroje ovšem v elektrickém poli nepopisují skutečný mechanický pohyb hmoty, jako by tomu bylo v hydrodynamice, v poli proudící tekutiny - jde jen o „geometrii“ silového pole v daném místě prostoru.)