

Objemové procesy v plynu

Z termodynamiky víme, že v **nerovnovážné** termodynamické soustavě, kde jsou například různé teploty nebo tlaky, probíhají **makroskopické procesy**, které mohou soustavu přivést **do stavu termodynamické rovnováhy**.

Tyto procesy lze obecně fyzikálně charakterizovat jako **přenos hmoty, energie a impulsu** a jejich charakter výrazně závisí na vztahu **střední volné dráhy** molekul plynu a **lineárního rozměru systému d** , ve kterém proces přenosu probíhá.

K posouzení tohoto vztahu se často používá veličina :

$$Kn = \frac{d}{\bar{l}} \quad \text{Knudsenovo číslo}$$

Jestliže je za vyšších tlaků **střední volná dráha molekul velmi malá** - tak, že ve srovnání s lineárním rozměrem systému platí nerovnost:

$$\bar{l} \ll d \quad \text{nebo-li} \quad Kn \gg 1 \quad \dots\dots\dots\text{tzv. viskózní podmínky}$$

potom **přenos fyzikální veličiny**, například tepla, probíhá uvnitř plynu pouze **vzájemnými srážkami** nejbližších molekul a plyn se podobá **spojité viskózní látce** (přenos tepla na stěny se samozřejmě děje srážkami molekul a stěny).

Jestliže naopak za nižších tlaků bude **střední volná dráha molekul velmi velká** - tak, že ve srovnání s lineárním rozměrem systému bude platit nerovnost:

$$\bar{l} \gg d \quad \text{nebo-li} \quad Kn \ll 1 \quad \dots\dots\dots\text{tzv. molekulární podmínky}$$

potom se molekuly plynu prakticky vzájemně nesrážejí a **přenos fyzikální veličiny**, například tepla, probíhá téměř výlučně **srážkami molekul se stěnami**, přičemž každá molekula plynu interaguje zcela individuálně.

A přechodové podmínky mezi těmito dvěma situacemi, kdy **střední volná dráha molekul je srovnatelná** s rozměrem systému:

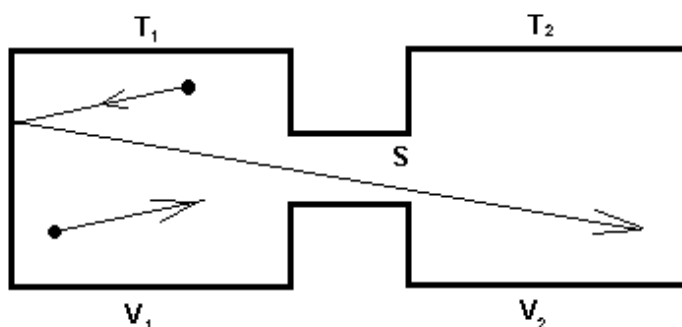
$$\bar{l} \approx d \quad \text{nebo-li} \quad Kn \approx 1 \quad \dots\dots \text{lze označit jako viskózně molekulární podmínky}$$

1. Tepelná transpirace (efúze) plynu

Ze zkušenosti víme, že když propojíme dvě tlakové nádoby s plynem (například plnou a prázdnou), plyn se přemístí tak, že tlaky se v nádobách po určité době vždy **vyrovnají**.

K tomuto ovšem dojde pouze za **vyšších tlaků**, kdy se plyn podobá spojitě viskózní látce, kdežto za **nízkých tlaků** při molekulárních podmínkách pozorujeme velmi zajímavý jev **nevyrovnání tlaku** v obou nádobách (**efúzní paradox**) :

Předpokládejme dvě uzavřené nádoby (objemy), spojené otvorem plochy S (viz obr.). Za molekulární podmínky $\bar{l} \gg d$ vzájemné srážky molekul plynu prakticky neexistují, molekuly se srážejí pouze s okolními stěnami.



Předpokládejme nejprve, že v obou nádobách je **na počátku** stejná teplota i koncentrace plynu (**rovnovážný stav**) - pak z levé nádoby dopadá na plochu S (a vniká do pravé nádoby) za jednotku času počet molekul – jinak řečeno - **proud (tok) molekul** :

$$J_1 = SZ = S \frac{1}{4} n \bar{v} = S \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \text{konst} \cdot n \sqrt{T}$$

a samozřejmě - z pravé strany dopadá na plochu S (a vniká do levé nádoby) **proud stejný**:

$$J_2 = SZ = S \frac{1}{4} n \bar{v} = S \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \text{konst} \cdot n \sqrt{T}$$

Tedy napíšeme pro názornost :

$$J_1 = \text{konst} \cdot n \sqrt{T} = \text{konst} \cdot n \sqrt{T} = J_2$$

A dále uvažme : jestliže nyní **zahřejeme** například levou nádobu na teplotu vyšší než je teplota pravé nádoby $T_1 > T_2$, pak bude

$$J_1 = \text{konst} \cdot n \sqrt{T_1} > \text{konst} \cdot n \sqrt{T_2} = J_2$$

a zleva doprava bude přecházet více molekul než směrem opačným - tedy v **pravé nádobě** se bude **zvětšovat jejich koncentrace** až na nějakou hodnotu větší než v levé nádobě $n_2 > n_1$, při které se proudy molekul **opět vyrovnají** (a nastane opět **rovnovážný** stav – lépe řečeno **ustálený, stacionární** stav):

$$J_1 = \text{konst} \cdot n_1 \sqrt{T_1} = \text{konst} \cdot n_2 \sqrt{T_2} = J_2$$

Bude tedy platit :

$$n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}$$

nebo-li :

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Při rozdílných teplotách budou tedy v pravé a levé nádobě za ustáleného stavu různé **koncentrace**, tedy i **tlaky** plynu (podle stavové rovnice):

$$p_1 = n_1 k T_1 \quad p_2 = n_2 k T_2$$

Po dosazení :

$$\left(\frac{p_1}{k T_1} \right) \cdot \left(\frac{k T_2}{p_2} \right) = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Dostaneme tak vztah pro tlaky v obou nádobách:

$$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}}$$

To je prakticky velmi důležité pro měření tlaku v oboru vysokého vakua.

Například: Ve vakuové peci o teplotě $T_1 = 2000\text{K}$ chceme změřit tlak ($p_1 = ?$). Aby se tlakoměr nepoškodil vysokou teplotou, umístíme ho mimo pec do malé vnější komůrky, kde je teplota $T_2 = 293\text{K}$ - tam ovšem bude naměřen odlišný tlak p_2 , z něhož skutečný tlak v peci vypočítáme :

$$p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = p_2 \sqrt{\frac{2000}{293}} = 2,61 \cdot p_2$$

2. Difuze plynu

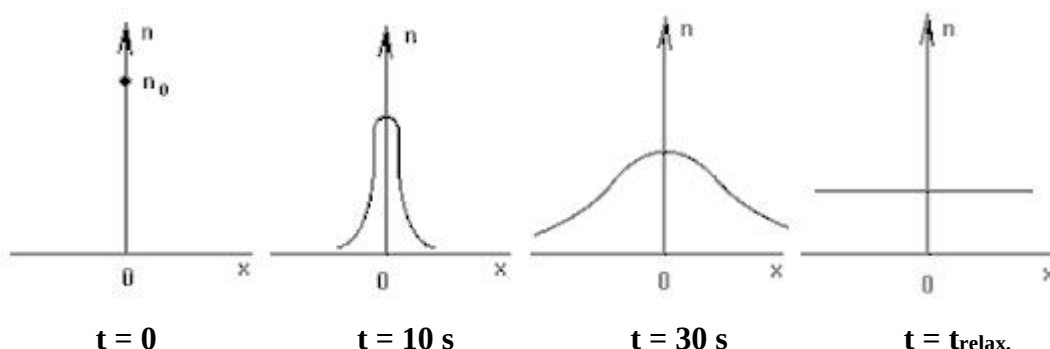
Na rozdíl od předchozího jevu je difuze plynu typickým jevem při **vyšších tlacích**, kdy molekuly konají velké množství srážek a jejich střední volná dráha je malá , tedy při **viskózních podmínkách**

$$\bar{l} \ll d$$

Nechť v počátečním čase $t = 0$ jednorázově zavedeme do určitého místa ($x = 0$) jednoho plynu nějaké množství druhého plynu (příměsi), tak, že v tomto místě vznikne počáteční nenulová koncentrace n_0

S postupem času - jako důsledek neuspořádaného pohybu - pronikají molekuly příměsi dál a dál od počátečního místa, jejich koncentrace bude nenulová i mimo počátek a neustále všude roste (ale v počátku je stále největší) - tento proces nazýváme **difuzí** druhého plynu (příměsi) v plynu prvním.

Po určité době (**relaxační**) se koncentrace všude vyrovná - difúze skončí, nastane **rovnovážný stav**, charakterizovaný všude stejnou koncentrací příměsi.



Je tedy základní charakteristikou probíhající difúze nějakého plynu (příměsi) v jiném plynu, že jeho koncentrace příměsi je funkcí místa:

$$n = n(\vec{r}) = n(x, y, z)$$

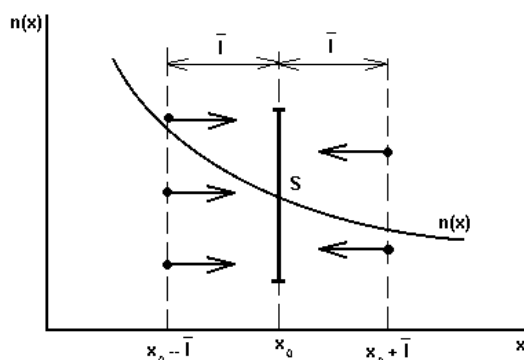
Pro jednoduchost prozkoumáme pouze **jednorozměrný příklad**, ve kterém bude koncentrace příměsného difundujícího plynu funkcí jediné souřadnice:

$$n = n(x).$$

Při výpočtu využijme nejjednodušší představu plynu – tzv. **jednorozměrný vrstvý model plynu** :

- 1) Všechny molekuly se pohybují stejnou rychlostí, rovnou střední rychlosti $\bar{v}$ - a v jednorozměrném případě se navíc všechny molekuly pohybují jen rovnoběžně s osou x (v kladném, nebo záporném směru osy).
- 2) Všem molekulám plynu také přiřadíme stejnou délku dráhy mezi dvěma srážkami, rovnou střední volné dráze $\bar{l}$ - jejich dráha se tedy skládá ze stále stejných úseků, rovnoběžných s osou x

Na obrázku je vyznačena koncentrace difundujícího plynu (napravo od místa $x = 0$) - jako klesající funkce $n(x)$.



Pro stanovení **proudu plynu** si představme plochu S v místě x_0 , kolmou na souřadnou osu x (viz obr.). Podle vztahu pro částicový dešť na tuto plochu dopadá za jednotku času zleva větší počet molekul než ze strany pravé

Uvažme dále, z **jakých míst** pocházejí tyto molekuly, dopadající na plochu S zleva i zprava ?

Letí jistě z míst jejich **posledních srážek** a tato místa jsou **různě vzdálená** od plochy S - **maximálně však jsou ve vzdálenosti rovné střední volné dráze** – tedy na plochách rovnoběžných s plochou S , na souřadnicích $(x_0 - \bar{l})$ a $(x_0 + \bar{l})$.

Vzájemné srážky molekul mají obecně pro objemové procesy v plynu **zásadní význam**, protože v nich dochází ke **změně rychlostí** molekul – mění se tedy také **hybnosti** a **energie** molekul.

Jako důsledek neuspořádaného pohybu molekul probíhají vzájemné srážky v libovolných místech objemu, ale vrstvý model definuje třetí zjednodušující předpoklad chování plynu :

3) Molekuly se vzájemně srážejí pouze v rovinách, které jsou vzdálené o střední volnou dráhu, tedy v našem případě se jedná o roviny na souřadnicích x -ové osy : $\dots, x_0 - \bar{l}, x_0, x_0 + \bar{l}, \dots$, a ve vrstvách mezi těmito rovinami se molekuly pohybují zcela beze srážek střední rychlostí $\bar{v}$,

Tento předpoklad tak umožní přiřadit všem dopadajícím molekulám jedinou hodnotu koncentraci : **Z levé strany** dopadají na plochu S molekuly, které pocházejí z míst $(x_0 - \bar{l})$, kde je koncentrace difundujících molekul :

$$n(x_0 - \bar{l})$$

Počet molekul dopadajících za jednotku času **zleva** na plochu S – tj. proud molekul z levé strany na plochu S můžeme proto vyjádřit pomocí částicového deště jako :

$$J_1 = \frac{1}{4} \cdot n(x_0 - \bar{l}) \cdot \bar{v} \cdot S$$

Analogicky **z pravé strany** dopadá na plochu S proud molekul :

$$J_2 = \frac{1}{4} \cdot n(x_0 + \bar{l}) \cdot \bar{v} \cdot S < J_1.$$

Celkový proud molekul přes plochu S - **difuzní proud** - směřující zleva doprava – bude dán jejich rozdílem (současně upravíme vytknutím, vynásobením a vydělením stejným výrazem) :

$$J_{dif} = J_1 - J_2 = \frac{1}{4} \cdot (n(x_0 - \bar{l}) - n(x_0 + \bar{l})) \cdot \bar{v} S \cdot \left(\frac{2\bar{l}}{2\bar{l}} \right)$$

V závorce vznikl **rozdl koncentrací**, který můžeme vyjádřit **diferenciálním** přírůstkem koncentrace molekul ve směru osy x (přírůstek je záporný) :

$$(n(x_0 - \bar{l}) - n(x_0 + \bar{l})) = -dn$$

Tento přírůstek vzniká mezi místy vzdálenými na x -ové ose o délku:

$$dx = 2\bar{l}$$

Po dosazení tak dostaneme výraz :

$$J_{dif} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right) \cdot \bar{v} S \cdot 2\bar{l} = -\frac{1}{2} \bar{l} \bar{v} \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right) \cdot S$$

Jestliže označíme konstanty plynu:

$$D = \frac{1}{2} \bar{l} \bar{v}$$

koeficient difúze

Dostáváme **základní zákon difuze** :

$$J_{dif} = -D \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right) \cdot S \quad \text{1. Fickův zákon}$$

Po vydělení plochou S vznikne vztah pro **plošnou hustotu difúzního proudu** :

$$j_{dif} = -D \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right)$$

Vektorový zápis pro třírozměrný případ difúze by vznikl zobecněním na další souřadné osy y a z . Protože jsou všechny osy rovnocenné, dostali bychom stejné výrazy, jen s derivacemi podle y a z a byly by to souřadnice výsledného vektoru proudové hustoty :

$$\vec{j}_{dif} = -D \cdot \text{grad } n \quad \text{plošná hustota difúzního proudu (vektor)}$$

Přestože **vrstvý model plynu**, s jehož pomocí jsme stanovili difúzní proud, se zdá být velmi primitivní, výsledný vztah je kvalitativně dokonalý a velmi složitý přesný výpočet vede pouze k **jediné korekci** - ve vztahu pro difúzní koeficient bude $\frac{1}{3}$ místo $\frac{1}{2}$.

Se započtením této změny dosadíme do difúzního koeficientu známé vztahy a upravíme pro daný plyn, koncentraci a konstantní teplotu :

$$D = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n4\sqrt{2}\sigma_{\infty} \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)} \right) \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \text{konst} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}}$$

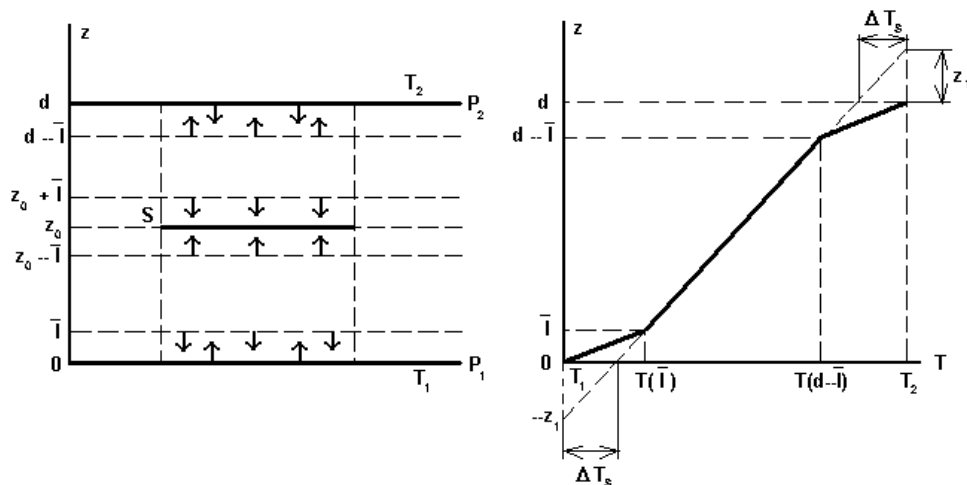
Difúzní koeficient a tedy i difúzní tok při daném gradientu koncentrace **klesá s rostoucí hmotností** molekul m - nejlépe tedy difundují nejlehčí plyny H_2 a He , což dobře osvětluje užití helia při hledání netěsností ve stěnách vakuových aparatur.

Pozn.: **2. Fickův zákon** stanoví časovou změnu koncentrace v neustáleném stavu (je úměrná prostorové změně gradientu koncentrace) :

$$\frac{dn}{dt} = D \cdot \frac{d^2 n}{dx^2}$$

3. Tepelná vodivost plynu (přenos tepla)

Tento jev nastane v případě, že části vakuového systému mají různé teploty.



Zkoumejme *dvě rovnoběžné plochy* P_1 a P_2 o *teplotách* T_1 a T_2 , ve *vzdálenosti* d a $T_1 < T_2$. Molekuly plynu mezi těmito plochami se *ohřívají* od teplejší plochy P_2 a *ochlazují* se od chladnější plochy P_1 a *teplota plynu tedy zřejmě stoupá* od teploty T_1 k teplotě T_2 a je funkcí souřadnice z : $T = T(z)$.

Sledujme plochu S kolmou na osu z v místě z_0 a použijeme vrstvý model plynu:

- molekuly, které na S *dopadají shora*, proletěly dráhu $\bar{l}$ a pocházejí tedy z místa $(z_0 + \bar{l})$,
- v tomto místě má plyn teplotu $T(z_0 + \bar{l})$ a molekuly tedy mají energii: $\frac{3}{2}kT(z_0 + \bar{l})$,
- tedy shora na plochu S dopadne za 1 času počet částic: $\frac{1}{4}n\bar{v}S$ a každá z nich má energii:

$$\frac{3}{2}kT(z_0 + \bar{l})$$

Potom celková energie, kterou tyto molekuly nesou, má hodnotu:

$$\frac{1}{4}n\bar{v}S \frac{3}{2}kT(z_0 + \bar{l})$$

Analogicky molekuly dopadající zdola na S nesou také energii, ale menší:

$$\frac{1}{4}n\bar{v}S \frac{3}{2}kT(z_0 - \bar{l})$$

Celkem tedy přes plochu S teče shora dolů tok (proud) energie - *tepelný tok*:
(odečteme menší výraz od většího, současně vytkneme, vynásobíme a vydělíme stejným číslem)

$$Q_v = \frac{1}{4}n\bar{v}S \frac{3}{2}k[T(z_0 + \bar{l}) - T(z_0 - \bar{l})] \cdot \left(\frac{2\bar{l}}{2\bar{l}}\right)$$

Analogicky jako u difuzního proudu označíme **teplotní spád (gradient)** (index v znamená vnitřní):

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_v = [T(z_0 + \bar{l}) - T(z_0 - \bar{l})] \left(\frac{1}{2\bar{l}}\right)$$

A zbývající konstanty označíme :

$$\lambda_v = \frac{1}{4} n \bar{v} \frac{3}{2} k 2\bar{l} = \frac{3}{4} n \bar{v} k \bar{l}$$

koeficient tepelné vodivosti (vnitřní).

Potom dostáváme pro tepelný tok jednoduchý vztah :

$$Q_v = \lambda_v S \cdot \left(\frac{dT}{dz}\right)_v$$

Můžeme také vyjádřit plošnou hustotu tepelného toku

$$j_Q = \lambda_v \left(\frac{dT}{dz}\right)$$

V prostorovém případě bude plošná hustota opět vektor, opačné orientace než vektor gradientu :

$$\vec{j}_Q = - \lambda_v \cdot \text{grad } T$$

plošná hustota tepelného toku (vektor)

Důle: Tento tepelný tok musí být zřejmě stejný v každém místě z pro stejné plochy S (zákon zachování energie) :

$$Q_v = \text{konst.}$$

Z toho ovšem plyne:

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_v = \text{konst.}$$

Tedy **teplota je uvnitř plynu lineární funkcí** souřadnice z .

Stejný tok energie teče ale také **na spodní plochu** P_1 (a **z horní plochy** P_2) - konkrétně:

- na P_1 dopadají molekuly z místa poslední srážky, tj. z vrstvy $z = \bar{l}$, tyto molekuly mají teplotu $T(\bar{l})$ a z plochy P_1 ovšem letí zpátky nahoru odražené molekuly.

Uvažme ale: **kdyby tyto molekuly byly jen pružně odražené**, měly by **stejnou rychlost** jako molekuly dopadající – tedy také **stejnou teplotu** $T(\bar{l})$ a **stejnou energii** – pak by se na plochu P_1 ale **nemohlo předávat žádné teplo!**

Odraz molekul od plochy P_1 tedy musí být nepružný, molekuly při něm předají ploše P_1 přebytkovou energii, tím se ochladí z teploty $T(\bar{l})$ na teplotu T_1 .

Pak energie předaná na plochu P_1 bude :

$$\frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T(\bar{l}) - T_1).$$

Ale proces odrazu (ochlazování) molekul je jistě **náhodný** - některé molekuly se mohou odrazit **pružně**, jiné se **ochladí** jen částečně (předají jen část energie).

Statisticky to lze popsat následovně: necht' N_{celk} je **celkový** počet molekul dopadlých na plochu, pak označme N_{ak} počet molekul, které se při nepružném odrazu **ochladily** na teplotu plochy (**dokonale se akomodovaly**, přizpůsobily se) a zbytek molekul ($N_{celk} - N_{ak}$) se odrazil pružně.

Pak definujeme veličinu **koeficient akomodace** (**pravděpodobnost akomodace energie**) jako poměrné zastoupení akomodovaných molekul k celkovému počtu molekul:

$$\alpha_E = \frac{N_{ak}}{N_{celk}}$$

Velikost tohoto koeficientu závisí na druhu plynu a materiálu a stavu plochy. Obecně jistě platí :

$$0 < \alpha_E < 1$$

Například: N_2 na čisté Pt $\alpha_E = 0,77$;
 O_2 na čisté Pt $\alpha_E = 0,79$;
 H_2 na čisté Pt $\alpha_E = 0,29$.

Tedy pouze část molekul α_E předá svoji energii ploše P_1 , tj. tepelný tok na P_1 bude:

$$Q_{P_1} = \alpha_E \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T(\bar{l}) - T_1).$$

Analogicky z plochy P_2 odtéká energie (koeficient α_E na této ploše by mohl být jiný):

$$Q_{P_2} = \alpha_E \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T_2 - T(d - \bar{l}))$$

Porovnejme tyto tepelné toky s tokem Q_v , například :

$$Q_{P_1} = Q_v$$

Dosadíme:

$$\alpha_E \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T(\bar{l}) - T_1) = \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k 2\bar{l} \left(\frac{dT}{dz} \right)_v.$$

Zkrátíme a dostáváme:

$$T(\bar{l}) - T_1 = \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \left(\frac{dT}{dz} \right)_v. \quad (1)$$

Stejným způsobem dostaneme z rovnosti $Q_{P_2} = Q_v$:

$$T_2 - T(d - \bar{l}) = \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \left(\frac{dT}{dz} \right)_v \quad (2)$$

A ještě jednu rovnici získáme vyjádřením lineární závislosti teploty $T(z)$, která platí uvnitř plynu – tedy v mezích $T(\bar{l})$ až $T(d - \bar{l})$:

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_v = \frac{T(d - \bar{l}) - T(\bar{l})}{d - 2\bar{l}}. \quad (3)$$

Dostali jsme tak 3 rovnice o třech neznámých: $\left(\frac{dT}{dz} \right)_v$, $T(\bar{l})$ a $T(d - \bar{l})$.

Pokuste se je vyřešit za domácí cvičení, výsledky by měli být :

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_v = \frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)}$$

$$T(\bar{l}) = T_1 + \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} \right) \quad T(d - \bar{l}) = T_2 - \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} \right)$$

Dále je možno **znázornit rovnici přímkou**:

$$T = T(z)$$

Podle horního obrázku: přímka začíná na ose z v bodě $z = -z_1$ a končí v bodě $z = d + z_1 = d + \left(\frac{2 - \alpha_E}{\alpha_E} \right) \cdot \bar{l}$, teplotní skok v místě ploch je: $\Delta T_s = \left(\frac{2 - \alpha_E}{\alpha_E} \right) \cdot \bar{l} \cdot \left(\frac{dT}{dz} \right)_v$.

Upravme dále formálně vztah pro **teplotní spád** uvnitř plynu :

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_v = \frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} = \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right) \cdot \left(\frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} \right) = \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right) \cdot G_E$$

kde jsme označili:

$$G_E = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)}$$

faktor posuvu (skluzu)

A dosadíme do vztahu pro tepelný tok:

$$Q = Q_v = Q_{P_1} = Q_{P_2} = \lambda_v S \cdot \left(\frac{dT}{dz} \right)_v = \lambda_v S \cdot G_E \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)$$

Jestliže nakonec zavedeme :

$$\boxed{\lambda = \lambda_v \cdot G_E} \quad \text{koeficient tepelné vodivosti (výsledný, vnější)}$$

Pak bude pro teplo přenášené z plochy P_2 na plochu P_1 platit vztah :

$$\boxed{Q = \lambda \cdot S \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)} \quad \text{výsledný tepelný tok}$$

Pozn.: zlomek $\left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)$ můžeme chápat jako **vnější gradient teploty**

Oprávněnost a efektivnost vrstvého modelu opět dokládá fakt, že přesný výpočet přenosu tepla pouze změní ve výrazu pro λ_v konstantu $\frac{3}{4}$ na 0,83 .

Uvažíme nyní dva mezní případy:

1. vysoké tlaky - viskózní podmínky, kdy $\bar{l} \ll d$, optimálně aby platilo $2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right) \ll d$

Pak zřejmě:

$$G_E = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} \cong 1$$

A vnější koeficient tepelné vodivosti bude :

$$\lambda = \lambda_v \cdot G_E = \lambda_v = \frac{3}{4} n \bar{v} k \bar{l}$$

Dosadíme za n :

$$\lambda = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{kT} \cdot \bar{v} k \bar{l} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{v}}{T} \cdot p \cdot \bar{l}$$

Protože součin $p \cdot \bar{l}$ **nezávisí** na tlaku (viz dříve) – tak také **koeficient tepelné vodivosti** a rovněž **tepelný tok** Q na tlaku **nezávisí** při vysokých tlacích jsou tedy **konstantní**.
(závisí na teplotě a druhu plynu)

2. nízké tlaky - molekulární podmínky, kdy $\bar{l} \gg d$ aby platilo $2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right) \gg d$.

Pak bude:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_v \cdot G_E = \frac{1}{4} n \bar{v} \cdot \frac{3}{2} k \cdot 2\bar{l} \cdot \frac{d}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{kT} \cdot \bar{v} \cdot \frac{3}{2} k \cdot 2 \cdot \frac{d}{2 \cdot \left(\frac{2 - \alpha_E}{\alpha_E}\right)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\bar{v}}{T} \cdot \left(\frac{\alpha_E}{2 - \alpha_E}\right) \cdot d \cdot p\end{aligned}$$

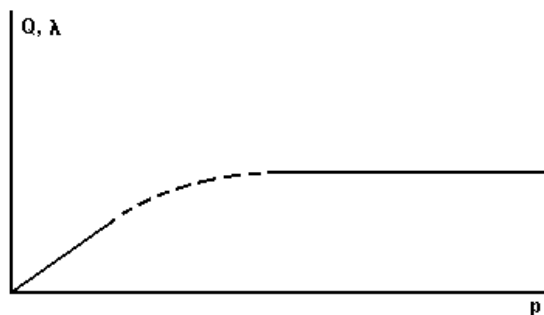
Koeficient tepelné vodivosti závisí na teplotě a druhu plynu a je **přímo úměrný tlaku** a **vzdálenosti** ploch – po jeho dosazení do vztahu pro tepelný tok pak poněkud překvapivě dostaneme :

$$Q = \lambda \cdot S \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{\bar{v}}{T} \cdot \left(\frac{\alpha_E}{2 - \alpha_E}\right) \cdot d \cdot p \cdot S \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d}\right)$$

Tepelný tok tedy je také **přímo úměrný tlaku** a navíc vidíme, že se vykrátí vzdálenost ploch d –
- tedy tepelný tok **nezávisí na vzdálenosti ploch**.

To je ovšem pochopitelné, neboť za nízkého tlaku se molekuly vzájemně **prakticky nesrážejí**, pouze vyletují z jedné plochy a dopadají na druhou plochu.

Graficky: celková závislost na tlaku



Aplikace: využívají nalezených závislostí pro nízké tlaky:

$$Q \approx p \bar{v} \approx p \cdot \sqrt{\frac{1}{m}}$$

- ❖ tepelné vakuometry
- ❖ tepelná izolace (vyžaduje nízký tlak, těžký plyn)

4. Tření plynu

Je analogické jevu vedení tepla, ale místo energie se přenáší impuls (hybnost).

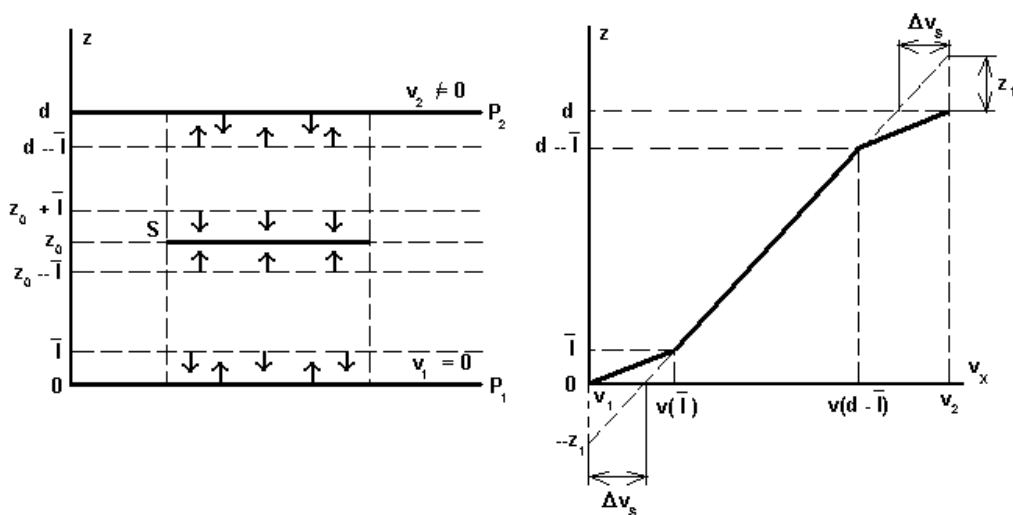
Zkoumejme opět dvě rovnoběžné plochy:

- P_1 pohybuje se rychlostí $v_1 (= 0)$ ve směru osy x ,
- P_2 pohybuje se rychlostí $v_2 (\neq 0)$ ve směru osy x .

Molekuly plynu mezi plochami získávají ve srážkách s plochou P_2 **přídavnou (driftovou, unášivou)** rychlost V ve směru osy x , (a hybnost mv), a ve vzájemných srážkách si ji pak dále předávají, v se proto mění od $v_1 = 0$ do v_2 v závislosti na souřadnici z :

$$v = v(z).$$

Použijeme stejný **vrstvý model** jako u vedení tepla - plyn je rozdělen do vrstviček vzdálených o střední volnou dráhu $\bar{l}$, v nich se pohybují molekuly beze srážek, srážky se konají pouze na hraničních plochách.



Počítají se opět **toky molekul plochou S** v libovolném místě z_0 :

- molekuly dopadající shora pocházejí z místa $(z_0 + \bar{l})$ a mají tedy přídavnou hybnost

$$m \cdot v(z_0 + \bar{l}),$$

- molekuly dopadající zdola mají hybnost $mv \cdot (z_0 - \bar{l})$.

Plochou S tedy za 1 času prochází tok hybnosti:

$$I_v = \frac{1}{4} n \bar{v} S m \cdot (v(z_0 + \bar{l}) - v(z_0 - \bar{l})) \cdot \left(\frac{2\bar{l}}{2\bar{l}} \right).$$

Analogicky s tepelným tokem označíme jako **vnitřní spád (gradient) unášivé rychlosti**:

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_v = (v(z_0 + \bar{l}) - v(z_0 - \bar{l})) \cdot \left(\frac{1}{2\bar{l}}\right)$$

A zbývající veličiny a konstanty vytvoří :

$$\eta_v = \frac{1}{4} n \bar{v} m \cdot 2\bar{l} = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l}$$

koeficient dynamické viskozity (vnitřní)

(také *koeficient vnitřního tření*)

Potom dostáváme pro **tok hybnosti** jednoduchý vztah, analogický tepelnému toku.

Uvažme ještě, že tok hybnosti znamená současně **změnu hybnosti** (za 1 času) molekul srážejících se na okrajových plochách vrstev (tj. **mezi jednotlivými vrstvami** plynu) – tato změna je ale podle 2. Newtonova zákona **rovna síle** působící na molekuly na těchto plochách – a je to **celková síla působící na plochách** S v jejich tečném směru (osy x) - tedy to **je třecí síla** :

$$F_t = I_v = \eta_v S \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right)_v$$

třecí síla (mezi vrstvami plynu)

Pozn. : Vrstvový model plynu je vlastně nejnázornějším modelem pro popis tohoto jevu vnitřního tření, protože v analogii s klasickou mechanikou si každý lehce představí vrstvu plynu jako těleso, které se pohybuje po hraniční ploše S s druhou vrstvou - za působení tečné třecí síly.

Tok hybnosti musí být opět stejný v každé výšce z (zákon zachování hybnosti) :

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_v = \text{konst.}$$

A teče i na plochu P_1 - tedy:

- na plochu P_1 dopadají molekuly o hybnosti $mv(\bar{l})$,
- a z P_1 vyletují molekuly s hybností $mv_1 = 0$, ale (analogie s vedením tepla) - jen jejich určitá **relativní část** α_p - **akomodační koeficient hybnosti**.

Tedy tok hybnosti na P_1 :

$$I_{P_1} = \alpha_p \cdot \frac{1}{4} n \bar{v} S m \cdot (v(\bar{l}) - 0)$$

a podobně pro tok z P_2 :

$$I_{P_2} = \alpha_p \frac{1}{4} n \bar{v} S m (v_2 - v(d - \bar{l})).$$

Z rovností:

$$I_{P_1} = I_{P_2} = I_v$$

plynou dvě rovnice:

$$\alpha_p \frac{1}{4} n \bar{v} S m v(\bar{l}) = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l} S \left(\frac{dv}{dz} \right)_v \Rightarrow v(\bar{l}) = \frac{2\bar{l}}{\alpha_p} \left(\frac{dv}{dz} \right)_v$$

A obdobně dostaneme :

$$v_2 - v(d - \bar{l}) = \frac{2\bar{l}}{\alpha_p} \left(\frac{dv}{dz} \right)_v$$

Třetí rovnice vznikne výpočtem spádu unášivé rychlosti uvnitř plynu:

$$\left(\frac{dv}{dz} \right)_v = \frac{v(d - \bar{l}) - v(\bar{l})}{d - 2\bar{l}}$$

Opět tedy dostáváme tři rovnice pro tři neznámé: $\left(\frac{dv}{dz} \right)_v$, $v(\bar{l})$ a $v(d - \bar{l})$.

Řešení jsou obdobná :

$$\left(\frac{dv}{dz} \right)_v = \frac{v_2 - v_1}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} \quad \dots\dots\dots \text{atd.}$$

Přímka $v = v(z)$ má stejný průběh jako u vedení tepla:

- začíná na ose z v bodě $-z_1 = -z_1$
- v místě ploch je rychlostní skok $\Delta v = \left(\frac{2 - \alpha_p}{\alpha_p} \right) \cdot \bar{l} \cdot \left(\frac{dv}{dz} \right)_v$

Řešení pro spád unášivé rychlost upravme stejně jako pro teplotní spád :

$$\left(\frac{dv}{dz} \right)_v = \frac{v_2 - v_1}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right) = G_p \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right)$$

kde jsme opět označili:

$$G_p = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)}$$

faktor posuvu (skluzu)

A dosadíme do vztahu pro tok hybnosti:

$$dF_t = I_{P_1} = I_{P_2} = I_v = \eta_v S \cdot \left(\frac{dv}{dz} \right)_v = \eta_v S G_p \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right)$$

Jestliže nakonec zavedeme :

$$\boxed{\eta = \eta_v G_p} \quad \text{koeficient dynamické viskozity (tření) (vnější, výsledný).}$$

Pak bude pro **tok hybnosti** přenášený z plochy P_2 na plochu P_1 - tedy pro **třecí sílu** působící na **vrstvičky** plynu a také na **plochy** P_1 a P_2 - platit jednoduchý vztah :

$$\boxed{F_t = \eta S \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right)} \quad \text{třecí síla}$$

Opět lze rozlišit dva mezní případy:

1. vysoké tlaky - viskózní podmínky, kdy $\bar{l} \ll d$ aby $\left(2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right) \right) \ll d$.

Pak zřejmě:

$$G_p = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} \cong 1$$

Tedy bude:

$$\eta = \eta_v = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{kT} \bar{v} m \bar{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{v} m}{kT} \cdot p \bar{l}$$

Tedy v tomto případě η i F_t nezávisí na tlaku, pouze na teplotě a druhu plynu.

Pozn.: Za vyšších tlaků v objemu plynu **existuje spojitá funkce** gradientu unášivé rychlosti $\left(\frac{dv}{dz} \right)$, jde tedy o typický jev **tření uvnitř plynu** - **vnitřní tření**.

2. nízké tlaky - molekulární podmínky, kdy $\bar{l} \gg d$ aby $\left(2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right) \right) \gg d$.

Potom bude :

$$\eta = \eta_v G_p = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l} \frac{d}{d + 2 \bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} = \frac{1}{4} \frac{p}{kT} \bar{v} m \left(\frac{\alpha_p}{2 - \alpha_p} \right) d = \frac{\bar{v} m}{4kT} \left(\frac{\alpha_p}{2 - \alpha_p} \right) \cdot d \cdot p$$

Tedy koeficient dynamické viskozity η závisí na **teplotě** a **druhu** plynu a je **přímo úměrný** tlaku a **vzdálenosti ploch** a po jeho dosazení tak dostaneme pro třecí sílu :

$$F_t = \eta S \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right) = \frac{\bar{v} m}{4kT} \left(\frac{\alpha_p}{2 - \alpha_p} \right) \cdot d \cdot p \cdot S \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right)$$

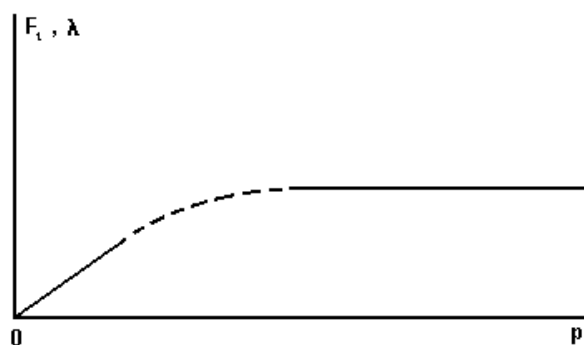
Vidíme, **že třecí síla** je také **přímo úměrná tlaku** a navíc se vykrátí vzdálenost ploch d –
- třecí síla **nezávisí na vzdálenosti ploch**.

To je opět pochopitelné, neboť za nízkého tlaku se molekuly vzájemně prakticky nesrážejí, pouze vyletují z P_1 a dopadají na P_2 a opačně.

Pozn.: Za nízkých tlaků neexistuje v plynu spojitá funkce gradientu unášivé rychlosti $\left(\frac{dv}{dz} \right)$ -

- jde o tzv. **vnější tření**.

Graficky :



..

Aplikace: využívá nalezené závislosti pro nízké tlaky: $F_t \approx p$

❖ Viskózní vakuometry