Elektromagnetické vlnění

Se čtyřmi Maxwellovými parciálními diferenciálními rovnicemi jsme se již seznámili v minulé kapitole :

$$(1)\quad div\,\vec{D} = \rho \qquad\qquad (3)\quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(2)\quad div\,\vec{B} = 0 \qquad\qquad (4)\quad rot\,\vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Tyto rovnice vyjádřily sice fyzikální poznatky, známé již dříve, dokázaly však předpovědět možnost existence dosud neznámých dějů v elektromagnetickém poli, které by měly charakter vlnění – tzv. ***elektromagnetické vlny*** a teprve na základě této předpovědi pak byly následně vlnové jevy experimentálně dokázány (1887 Hertz).

V následujících řádcích si ukážeme důkaz existence a vlastností takového vlnění v nejjednodušším případě homogenního izotropního nevodivého prostředí (dielektrika) bez proudů a volných nábojů, kdy tedy bude platit :

$$\vec{i} = 0 \qquad\qquad \vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$$

$$\rho = 0 \qquad\qquad \vec{B} = \mu\cdot\vec{H}$$

Po dosazení první dvojice matematických podmínek pak dostaneme nejjednodušší možný tvar Maxwellových rovnic :

$$(1)\quad div\,\vec{D} = 0 \qquad\qquad (3)\quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(2)\quad div\,\vec{B} = 0 \qquad\qquad (4)\quad rot\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Do poslední rovnice dosadíme nyní dosadíme druhou dvojici podmínek (materiálové vztahy) :

$$(4)\quad rot\,\frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\cdot\vec{E})$$

Jednoduchou úpravou vznikne tvar :

$$rot\ \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dále derivujeme tuto rovnici podle času, tj. derivujeme obě její strany (na pravé straně tedy vznikne druhá časová derivace :

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Protože operátor rotace je tvořen pouze derivacemi podle prostorových souřadnic, můžeme zaměnit pořadí s časovou derivací :

$$rot\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Za časovou derivaci na levé straně můžeme nyní dosadit z rovnice (3) :

$$rot\,(-\,rot\,\vec{E}\,) = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Konstantu (znaménko mínus) můžeme samozřejmě z derivací na levé straně vytknout :

$$-\,rot\ rot\,\vec{E} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

A dvojitou rotaci upravíme pomocí známého matematického vztahu s Laplaceovým operátorem, který jsme již použili v kapitole „Základní rovnice magnetického pole“ :

$$-(\,grad\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E}\,) = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

První člen v závorce je nulový, neboť podle rovnice (1) platí :

$$(1) \quad div\,\vec{D} = div(\,\varepsilon \cdot \vec{E}\,) = 0$$

A po vydělení konstantou je nulová i divergence intenzity :

$$div\,\vec{E} = 0$$

Dostáváme tedy výsledný vztah :

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Kdybychom provedli analogické úpravy výchozí rovnice (3) , vznikl by formálně stejný vzorec i pro magnetickou indukci :

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Nalezení těchto vztahů bylo velmi překvapivým a zásadním teoretickým objevem (a pravděpodobně také nejdůležitějším objevem 19. století). Po matematické stránce sice tyto rovnice nepřinášely nic nového a sami fyzikové už znali velmi dlouho tento typ parciálních diferenciálních rovnic – v klasické fyzice byla totiž odvozena tzv. vlnová rovnice (viz FYA1) :

$$\boxed{\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$$

<u>vlnová rovnice (obecný tvar)</u>

Tato rovnice popisuje libovolné postupné vlnění, které se šíří ve hmotném prostředí fázovou rychlostí c . Jak také víme z minulého semestru, nejjednodušším řešením je rovinná vlna postupující v kladném směru osy x , kdy je výchylka hmotného bodu popsána libovolnou funkcí „zpožděného času" :

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

<u>obecná výchylka hmotného bodu</u>

Jestliže tedy pro veličiny elektromagnetického pole byly nalezeny vztahy, které jsou formálně matematicky shodné s mechanickou vlnovou rovnicí, znamenalo to objev nového, zatím experimentálně nepotvrzeného druhu postupného vlnění, které může probíhat v elektromagnetickém poli – nazvaného ***<u>elektromagnetické vlnění</u>*** :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

<u>vlnové rovnice elmg. vlnění</u>

Jestliže mluvíme o formální matematické shodě s mechanickou vlnovou rovnicí, máme tím na mysli, že ačkoliv v těchto rovnicích vystupují jiné fyzikální veličiny – označené jinými písmeny – na obou stranách rovnice se provádějí naprosto stejné matematické operace – na levé straně je Laplaceův operátor (tj. součet všech druhých parciálních derivací podle prostorových souřadnic), na pravé straně je pak druhá časová derivace, vynásobená konstantou.

Tvar této konstanty je v elektromagnetické vlnové rovnici jiný než v mechanické, ale jistě se musí nechat vyjádřit pomocí fázové rychlosti tohoto (elektromagnetického) vlnění - tj. jednoduše řečeno - porovnáme nyní konstanty v obou vlnových rovnicích:

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon \cdot \mu$$

Vyřešením dostaneme vztah pro fázovou rychlost elektromagnetického vlnění :

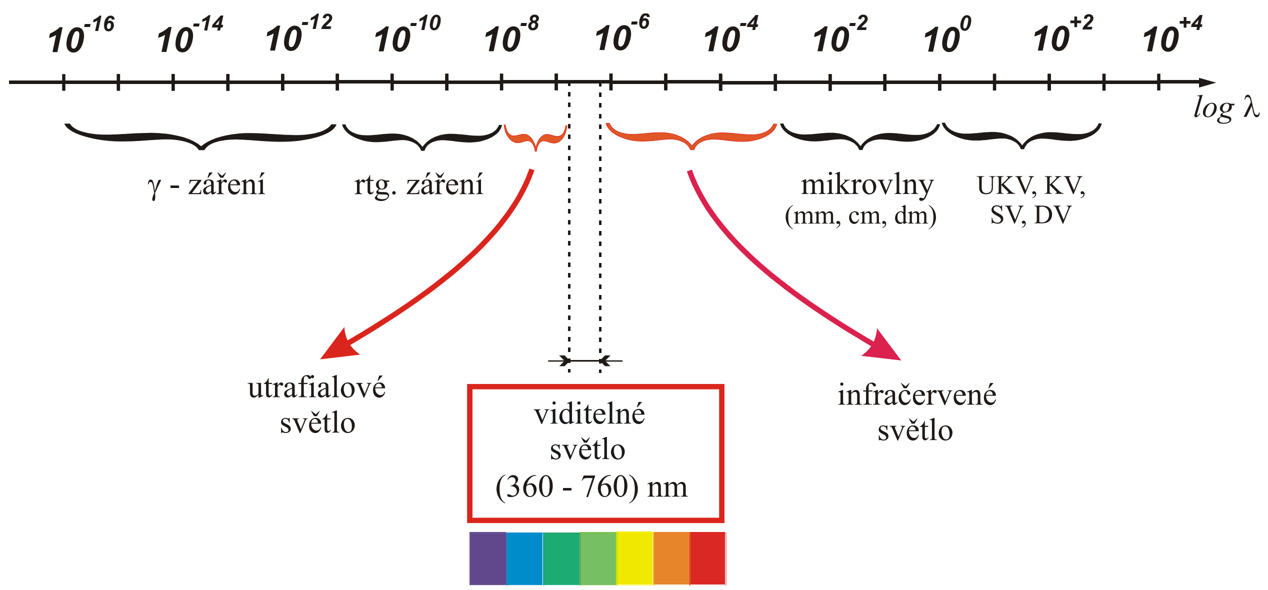
$$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}}}$$

fázová rychlost elektromagnetického vlnění

Jestliže do tohoto vztahu dosadíme parametry nejjednodušího prostředí - vakua, dostaneme :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_o \cdot \mu_o}} \approx 2{,}998 \cdot 10^8 \quad [m/s]$$

Již tenkrát, ve druhé polovině 19. století, se vypočítaná hodnota velmi přesně shodovala se změřenou rychlostí světla, což se stalo východiskem pro tvrzení, že světlo je elektromagnetické vlnění a položilo základ elektromagnetické teorii světla. Tato teorie se skvěle potvrdila a dnes víme, že nejenom světlo je elektromagnetické vlnění – v přírodě se setkáváme s tímto druhem vlnění o různých vlnových délkách - od 10^{-16} m do prakticky nekonečna :



Tehdejší vědci si ovšem jev vlnění nedokázali představit jinak, než ve spojení s nějakým hmotným prostředím (nazvali ho ***ether***), ve kterém by se mohli šířit mechanické výchylky jeho hmotných částic. Zkoumání vlastností éteru a dokazování jeho existence (které spočívalo zejména ve velmi pečlivém měření rychlosti světla) vedlo nakonec ke krizi celé klasické fyziky (mechaniky) a ke vzniku a rozvoji fyziky moderní (teorie relativity).

Pozn. : Mnohokrát opakované měření rychlosti světla mělo také za následek, že tato fyzikální veličina vždy patřila k nejpřesněji změřeným veličinám a dnes je dokonce definována jako veličina absolutně přesná, tj. s nulovou chybou (absolutní i relativní):

$$\boxed{c \;=\; 299\,792\,458 \quad m/s}$$

(viz ještě dodatky na konci kapitoly)

K velmi zajímavému výsledku dojdeme, jestliže se pokusíme zodpovědět otázku, jaké jsou **směry vektorů** elektromagnetických veličin v elektromagnetickém vlnění : Použijeme k tomu opět rovinnou vlnu šířící se v homogenním izotropním dielektriku bez volných nábojů ve směru osy x, v jejím nejobecnějším tvaru, jako libovolné funkce zpožděného času :

$$\vec{E}(x,t) \;=\; \vec{E}(t \;-\; \frac{x}{c})$$

Protože budeme pracovat se třetí Maxwellovou rovnicí, vyjádříme nejprve rotaci tohoto vektoru a použijme přitom formální operátor nabla ve složkovém tvaru :

$$rot\,\vec{E} \;=\; \nabla \times \vec{E} \;=\; \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{E}(t - \frac{x}{c})$$

Operátor nabla je tím vyjádřen jako vektorový součet tří samostatných operátorů a je možno provést „roznásobení“ závorky :

$$rot\,\vec{E} \;=\; \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} \times \vec{E}(t - \frac{x}{c}) \;+\; \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} \times \vec{E}(t - \frac{x}{c}) \;+\; \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \times \vec{E}(t - \frac{x}{c})$$

S vektorovým operátorem se formálně zachází jako s obyčejným vektorem - s parciálními derivacemi lze přejít do druhého členu vektorového součinu :

$$rot\,\vec{E} \;=\; \vec{i} \;\times\; \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{E}(t - \frac{x}{c}) \;+\; \vec{j} \;\times\; \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{E}(t - \frac{x}{c}) \;+\; \vec{k} \;\times\; \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{E}(t - \frac{x}{c})$$

Nyní už vznikly výrazy , které mají konkrétní matematický význam – parciální derivace elektrické intenzity, která je ovšem funkcí pouze x a t , proto je druhý a třetí člen na pravé straně nulový a zbude pouze :

$$rot\,\vec{E} \;=\; \vec{i} \;\times\; \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{E}(t - \frac{x}{c})$$

Jestliže označíme „vnitřek“ vektorové funkce $\vec{E}$ jako novou pomocnou proměnnou (parametr) :

$$p = t - \frac{x}{c}$$

Pak můžeme parciální derivace elektrické intenzity počítat jako derivace složené funkce, například derivaci podle času t:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(p(x,t)) = \frac{d\vec{E}}{dp}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{d\vec{E}}{dp}\cdot 1 = \frac{d\vec{E}}{dp}$$

A analogicky ještě parciální derivaci podle x, přičemž použijeme předchozí výsledek :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{E}(p(x,t)) = \frac{d\vec{E}}{dp}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\vec{E}}{dp}\cdot(-\frac{1}{c}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot(-\frac{1}{c})$$

Dostali jsme tak jednoznačný vztah mezi oběma parciálními derivacemi funkce $\vec{E}$, který využijeme v další úpravě.

Dopočítáme především hodnotu operátoru rotace :

$$rot\,\vec{E} = \vec{i} \times \frac{\partial}{\partial x}\vec{E}(t-\frac{x}{c}) = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot(-\frac{1}{c}) = -\frac{1}{c}\cdot\vec{i} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A nyní můžeme tento výsledek konečně dosadit do třetí Maxwellovy rovnice :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\vec{i} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A tedy :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c}\cdot\vec{i} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Parciální derivace podle času představují samozřejmě pouze „částečné“ přírůstky funkce (za jednotku času), ale na daném, neměnném místě to jsou přírůstky veškeré – úplné, tedy (po vynásobení diferenciálem času) :

$$d\vec{B} = \frac{1}{c}\cdot\vec{i} \times d\vec{E}$$

Za zjevně rozumného předpokladu, že všechny přírůstky jednoho každého vektoru mají stále stejný směr, znamená tato rovnice vztah přímé úměry mezi <u>velikostmi</u> těchto přírůstků (s konstantním koeficientem) :

$$dB = konst\cdot dE$$

Tato rovnice může být zřejmě splněna <u>jedině tehdy</u>, když obě veličiny (oba kmity) budou vyjádřeny **stejnými (periodickými) funkcemi** (např. harmonickými) a budou „**ve fázi**“ (budou mít nulový fázový rozdíl, nebo odpovídající celistvým násobkům periody funkce), tj. budou <u>současně ve svých nulových bodech</u> a pak budou společně růst „stejným tempem“ do kladného maxima a pak stejně rychle klesat atd.

Potom můžeme v libovolném časovém intervalu (t_o , t) jednoduše sečíst (integrovat) přírůstky $d\vec{B}$ a $d\vec{E}$ na obou stranách poslední vektorové rovnice (provedeme její integraci) a za předpokladu, že v počátečním čase byly obě veličiny nulové $(B = E = 0)$, dostaneme :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \vec{i} \times \vec{E}}$$

Nebo jinak :

$$c \cdot \vec{B} = \vec{i} \times \vec{E}$$

Nezapomeňme, že vektor osy x označuje také směr šíření elektromagnetické vlny, tj. směr fázové rychlosti a že konstanta u vektoru samozřejmě nemění jeho směr, proto plyne z této rovnice, že vektor magnetické indukce je kolmý na vektor elektrické intenzity a na směr rychlosti šíření vlny – na osu x, matematicky :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{B} \perp \vec{E} \\ \vec{B} \perp \vec{i}\,(\vec{c})(x) \end{array}}$$

směry vektorů

A pro velikosti těchto vektorů platí :

$$\boxed{E = c \cdot B}$$

vztah mezi elektrickými a magnetickými veličinami

Dokážeme ještě, že i vektor elektrické intenzity je kolmý na směr šíření vlny. Použijeme první Maxwellovu rovnici pro homogenní izotropní dielektrikum bez volných nábojů :

$$div\vec{D} = 0$$

Tedy také :

$$div\vec{E} = 0$$

Budeme postupovat analogicky jako v předešlém výpočtu - vyjádříme divergenci pomocí operátoru nabla, se zápisem ve složkách :

$$div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{E}(t - \frac{x}{c})$$

Roznásobíme závorku a uvážíme nulovost derivací podle y a z :

$$div\,\vec{E} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{E}(t-\frac{x}{c})$$

A opět převedeme na derivaci podle času :

$$div\,\vec{E} = \vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot(-\frac{1}{c})$$

Tato divergence je podle první Maxwellovy rovnice nulová, po vykrácení konstantou tedy dostáváme také nulový skalární součin :

$$\vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

Integrací za stejných podmínek jako v předešlém výpočtu vznikne vztah :

$$\vec{i}\cdot\vec{E} = 0$$

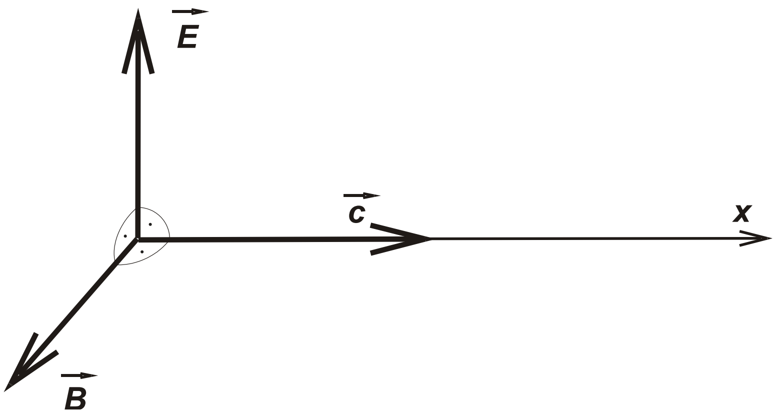
Je tedy i vektor elektrické intenzity kolmý na osu x .

Celkem pak :

V elektromagnetickém vlnění jsou elektrické a magnetické veličiny kolmé na směr šíření vlny a současně jsou kolmé i na sebe navzájem, přičemž jejich velikosti jsou vzájemně přímo úměrné.

$$\boxed{\vec{B}\perp\vec{E} \qquad \vec{B}\perp\vec{i} \qquad \vec{E}\perp\vec{i}}$$

$$\boxed{E = c\cdot B}$$



Tento obrázek by nás mohl vést k představě, že také směry těchto vektorů jsou v prostoru pevně „zafixovány“ , že např. vektor $\vec{E}$ má stále svislý směr (osy z) a vektor $\vec{B}$ má stále směr vodorovný (osy y).

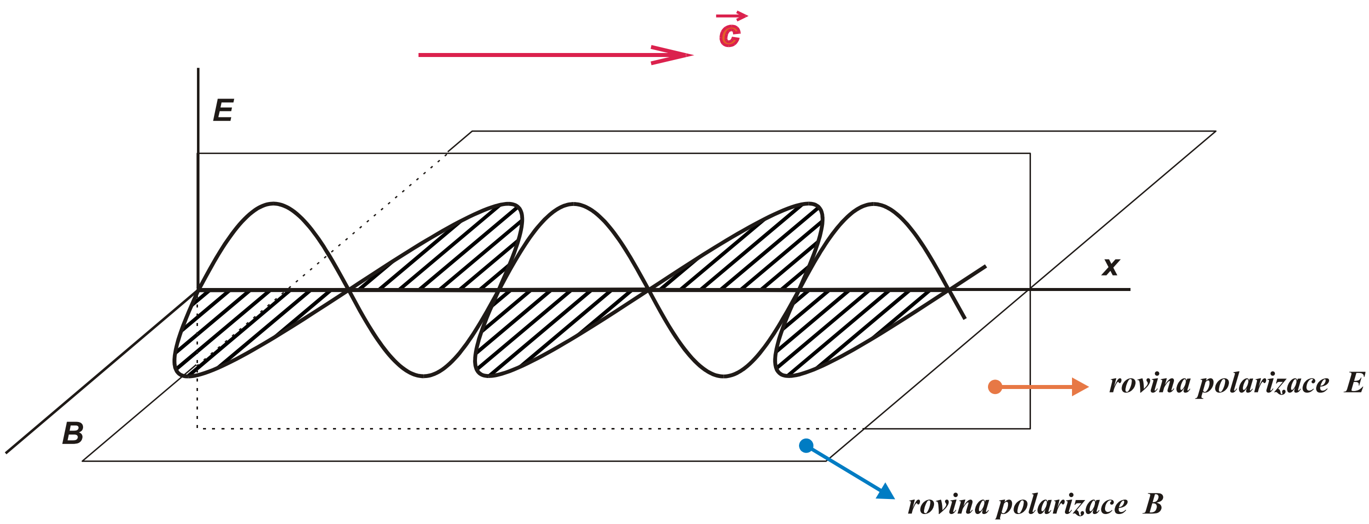
To by bylo velmi výhodné - pak bychom samozřejmě při popisu vlnění vystačili pouze se skalárními veličinami – velikostmi těchto vektorů - tedy např. pro rovinné harmonické vlnění postupující ve směru osy x by platilo (nezapomeňte, že obě veličiny musí být ve fázi – viz výše) :

$$B = B_o \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$E = E_o \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Neměnný směr vektoru $\vec{E}$ (stejně tak $\vec{B}$) také ale znamená, že tento vektor stále „kmitá“ ve stejné rovině (zde rovina xz) - že se jedná o ***lineárně polarizované vlnění*** .

(„Elektrická vlna“ má tedy svoji ***rovinu polarizace*** (xz) a „magnetická vlna“ má také svoji rovinu polarizace (yz) , obě roviny jsou na sebe kolmé, viz následující obrázek) :



V následujících řádcích si ukážeme, že tato situace je sice reálná, ale nastává pouze ve zvláštních případech, že tedy obecně elektromagnetické vlnění není lineárně polarizované.

Jako důsledek jednoznačné souvislosti elektrických a magnetických veličin ($\vec{E}$ a $\vec{B}$) postačí, když podrobně prozkoumáme chování pouze jednoho z těchto vektorů. Předpokládejme tedy opět rovinné vlnění postupující ve směru osy x a libovolnou polohu vektoru elektrické intenzity $\vec{E}$, kterou vyjádříme obecným zápisem vektoru :

$$\vec{E} = (E_x , E_y , E_z)$$

Víme, že vektor elektrické intenzity musí splňovat vlnovou rovnici :

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Tato rovnice je vektorová , tj. jsou to vlastně tři skalární rovnice pro tři souřadnice vektoru intenzity :

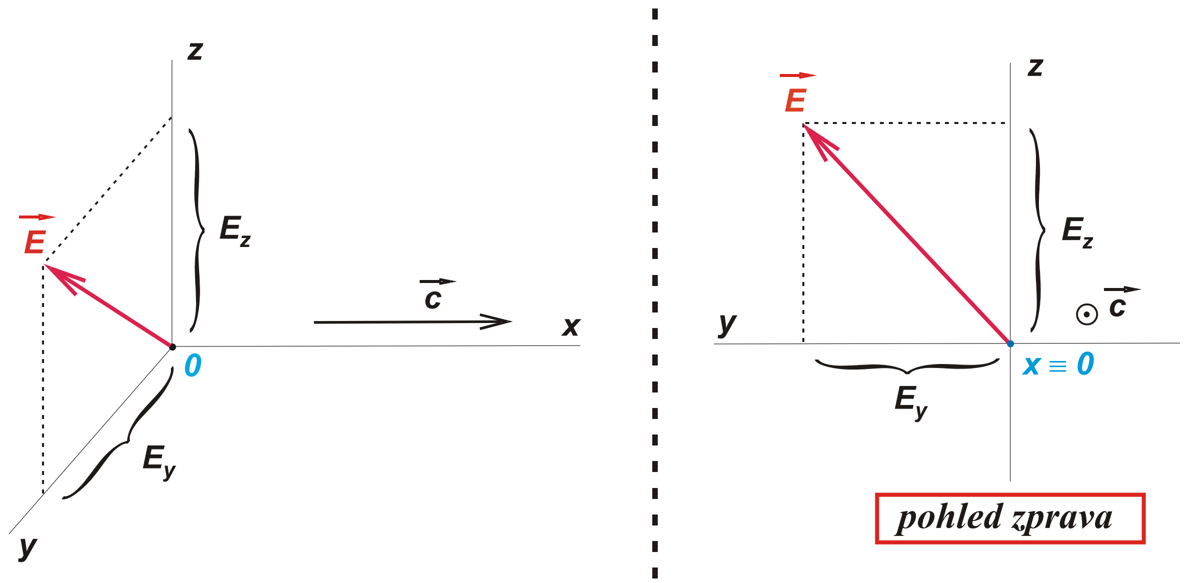
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta E_x &= \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y &= \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z &= \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

Řešení každé z těchto skalárních vlnových rovnic je „skalární" vlnění příslušné souřadnice vektoru, tj. vlnění, jehož kmity se dějí pouze v této souřadné ose (je to vlastně jednoduché <u>lineárně polarizované</u> vlnění).

Než napíšeme rovnice těchto vln, uvědomme si dříve odvozenou podmínku pro směry vektorů – vektor $\vec{E}$ je vždy kolmý na směr šíření vlny (osu x), proto tedy můžeme ihned napsat jeho x-ovou souřadnici :

$$\boxed{E_x = 0}$$

Obecná poloha tohoto vektoru je pak znázorněna na následujícím obrázku :



První skalární vlnová rovnice (pro nulové E_x) je proto vždy identicky splněna a budeme hledat řešení pouze druhé a třetí rovnice. Víme, že půjde o skalární veličiny – zbylé souřadnice E_y a E_z vektoru $\vec{E}$ - a také víme, že vlnovou rovnici řeší každá funkce „zpožděného času“ $(t - \frac{x}{c})$.

Z důvodu názornosti výsledku si vyberme pro naši diskusi speciální tvar této funkce – „sinusovku“ , která popisuje nejčastější ***harmonické vlnění*** :

Chceme tedy zjistit harmonické řešení dvou relativně nezávislých diferenciálních rovnic :

$$\Delta E_y = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\Delta E_z = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

V prvním kroku odhadneme, že obě řešení se v důsledku této nezávislosti mohou lišit ve všech parametrech vlnění (kmitů) – tj. amplitudě, frekvenci (vlnové délce) a ve fázové konstantě :

$$E_y = E_{oy} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x + \varphi_1\right)$$

$$E_z = E_{oz} \cdot \sin\left(\omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x + \varphi_2\right)$$

Ve druhém kroku si pak uvědomíme, že obě vlnové rovnice nejsou samozřejmě zcela nezávislé – jejich řešení tvoří souřadnice jednoho jediného, výsledného vektoru vlnění. Jinak řečeno – výše napsané rovnice popisující jednoduchá (skalární, lineárně polarizovaná) vlnění musí dohromady společně vytvořit - složit - rovnici pro jediné výsledné vlnění.

Dosti nečekaně jsme se tak dostali na problém skládání vlnění, kterého jsme se už dotkli v minulém semestru. Připomeňte si, že skládání dvou vlnění není nic jiného, než obyčejné skládání dvou kmitů, které se ovšem děje v každém místě sledovaného prostoru.

Také naše dvě poslední rovnice představují pro určité (libovolné) místo, tj. souřadnici x, dva harmonické kmity, které jsou navzájem kolmé .

Skládání těchto kmitů, které lze samozřejmě formálně zapsat jako výsledný vektor :

$$\vec{E} = (0, E_y, E_z)$$

je tedy možno konkrétně také řešit jako „obyčejné“ skládání kolmých kmitů . Nahlédnutím do příslušné otázky z minulého semestru zjistíme, že toto skládání „mělo smysl“ – tj. vznikla rozumná periodická funkce, uzavřená jednoduchá křivka – jedině za podmínky rovnosti frekvencí obou kmitů.

Naše dvě rovnice pro E_y a E_z vlnění musí proto mít stejné úhlové frekvence :

$$\omega = 2\pi f = \omega_1 = \omega_2$$

Protože obě vlnové rovnice a tedy i obě jednoduchá skalární vlnění mají stejnou fázovou rychlost, jsou stejné i vlnové délky :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \lambda_1 = \lambda_2$$

A jsou proto také stejné úhlové vlnočty (velikosti vlnových vektorů) :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = k_1 = k_2$$

Neexistuje ovšem důvod, aby byly také stejné amplitudy a stejné fázové konstanty obou vlnění (matematicky to jsou integrační konstanty v řešení diferenciálních rovnic).

Dostali jsme se tak ke konečným vztahům :

$$\boxed{\begin{aligned} E_y &= E_{oy} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_1) \\ E_z &= E_{oz} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_2) \end{aligned}}$$

Tyto rovnice (spolu s nulovou x-ovou souřadnicí) je možno považovat za obecné řešení elektromagnetického vlnění. Matematicky to jsou parametrické rovnice nějaké periodické – uzavřené - křivky v rovině yz (u mechanického vlnění by to byla dráha hmotného bodu), pro diskusi její geometrie převeďme tyto rovnice do běžného implicitního tvaru :

Z obou rovnic pro E_y a E_z vyloučíme proměnný argument $(\omega \cdot t - k \cdot x)$ následujícím postupem (který je matematicky stejný jako v kapitole „Skládání kolmých kmitů“) :

Upravme například druhou rovnici formálním odečtením a přičtením fázové konstanty φ_1 :

$$E_z = E_{oz} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1)$$

Nyní můžeme definovat veličinu, která popisuje fázový posun (rozdíl) obou jednoduchých vlnění (kmitů) v místě x :

$$\boxed{\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

fázový rozdíl vlnění

Dosadíme zpět do druhé rovnice a použijeme součtový vzorec pro funkci sinus :

$$E_z = E_{oz} \sin(\omega t - kx + \varphi + \varphi_1) = E_{oz}(\sin(\omega t - kx + \varphi_1)\cos\varphi + \cos(\omega t - kx + \varphi_1)\sin\varphi)$$

Rovnici vydělíme amplitudou E_{oz} a na pravé straně dosadíme z první rovnice :

$$\frac{E_z}{E_{oz}} = \frac{E_y}{E_{oy}} \cdot \cos\varphi + \sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2} \cdot \sin\varphi$$

Rovnici připravíme na umocnění :

$$\sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2} \cdot \sin\varphi = \frac{E_z}{E_{oz}} - \frac{E_y}{E_{oy}} \cdot \cos\varphi$$

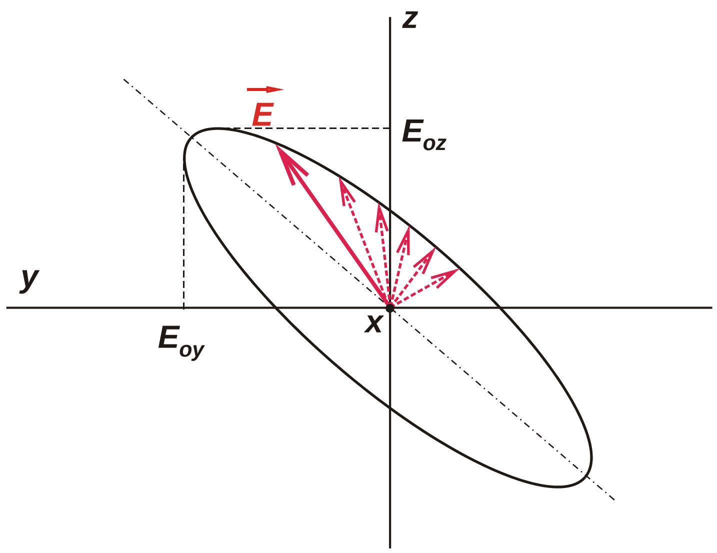
A provedeme :

$$(1-\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2) \cdot \sin^2\varphi = \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right) \cdot \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right) \cdot \cos\varphi + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 \cdot \cos^2\varphi$$

Po spojení členů s kvadráty goniometrických funkcí a s využitím známého vztahu pro jejich součet dostaneme :

$$\boxed{\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right) \cdot \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right) \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

Je to obecná ***rovnice elipsy ve středové poloze*** v proměnných E_y a E_z , kdy její střed je totožný se středem souřadnic, osa elipsy je však odkloněna o ostrý úhel vůči osám souřadnic (viz obr.).



Koncový bod vektoru elektrické intenzity tedy leží na elipse a tak, jak se s časovým postupem vlnění (nebo se změnou pozorovaného místa na ose x) mění argument harmonických kmitů na obou souřadnicích, tento koncový bod se posouvá po dané elipse (na obrázku směrem doprava, nebo druhým směrem), tedy vektor $\vec{E}$ se otáčí kolem počátku souřadnic, ve dvou možných směrech, zřejmě v závislosti na fázovém rozdílu φ kmitů souřadnic.

Tento tvar elektromagnetického (nebo i jiného) vlnění se nazývá ***elipticky polarizované*** vlnění. Povšimněte si, že elipticky polarizované vlnění vzniklo za dvou jednoduchých lineárně polarizovaných vln, které probíhají (kmitají) ve směru dvou souřadných os (y a z).

Tvar elipsy závisí zejména na hodnotě fázového rozdílu φ , lze vyčlenit následující speciální případy :

a) Jestliže bude fázový rozdíl :

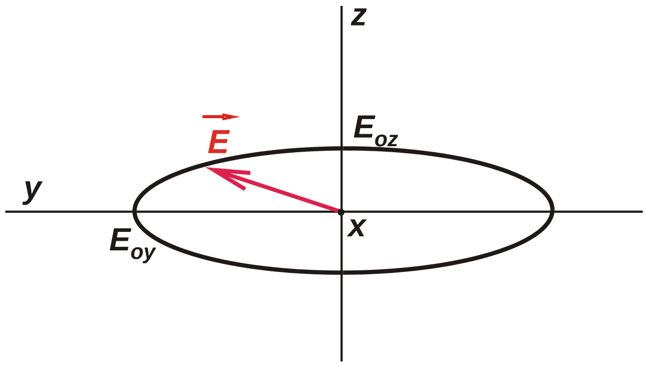
$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} + k.\pi}$$

(kde k je libovolné celé číslo, tj. kladné i záporné, včetně nuly)

Potom bude kosinus nulový, hodnota sinu bude jedna a obecná rovnice elipsy přejde na tvar :

$$\boxed{\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 = 1}$$

To je ***rovnice elipsy v osové poloze*** , kdy osy elipsy splývají se souřadnými osami x a y (viz obr.):

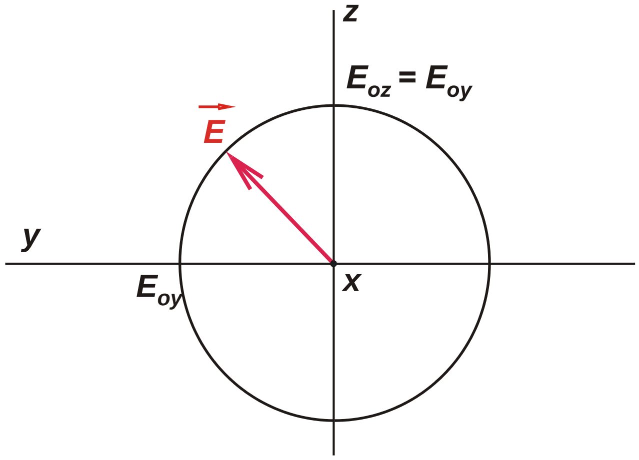


b) Jestliže budou navíc současně stejné amplitudy :

$$\boxed{E_{oy} = E_{oz}}$$

Potom lze na levé straně provést jejich vykrácení a dostaneme ***rovnici kružnice*** :

$$\boxed{E_y^2 + E_z^2 = E_{oy}^2}$$



Elektromagnetické vlnění bude v tomto případě ***kruhově polarizované*** .

c) Jestliže bude fázový rozdíl :

$$\boxed{\varphi = k.\pi}$$

(kde k je opět libovolné celé číslo)

Potom se obecná rovnice elipsy změní na tvar (znaménko + platí pro lichá čísla k) :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cdot\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right) = 0$$

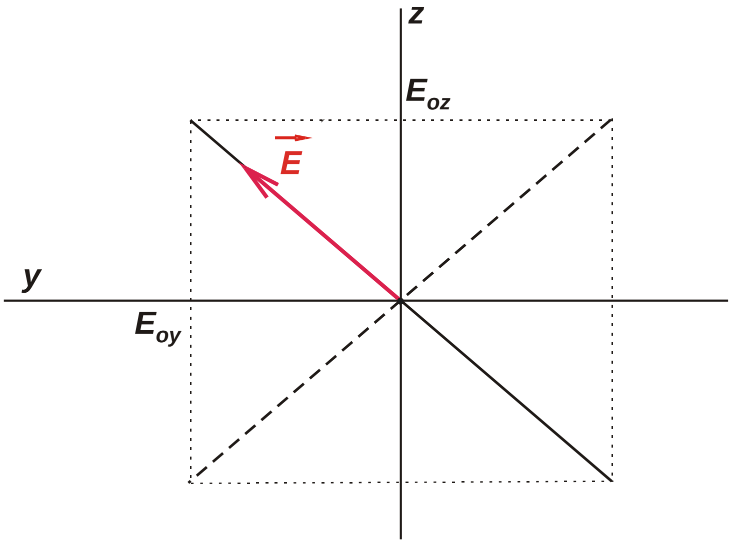
To lze upravit :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} \pm \frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 = 0$$

Po odmocnění a přesunu dostaneme (znaménko + nyní platí pro sudá čísla k) :

$$\boxed{E_z = \pm \frac{E_{oz}}{E_{oy}} \cdot E_y}$$

To je ***rovnice přímky*** (přesněji řečeno úsečky , protože souřadnice na obou osách jsou omezeny amplitudami E_{oy} a E_{oz}), která prochází kvadranty I. a III. (pro sudé k), nebo kvadranty II. a IV. (pro liché k, viz obr.).



Až v tomto speciálním případě, kdy obě jednoduché vlny v souřadnicích E_y a E_z jsou „ve fázi“, jsme tedy dostali ***lineárně polarizované*** elektromagnetické vlnění.

Takové elektromagnetické vlnění , např. ve formě viditelného světla, vzniká při různých fyzikálních jevech – např. při známém obyčejném odrazu a lomu světla.

Elektromagnetické vlnění, které vysílají běžné zdroje – rozžhavená tělesa - má ale ještě jinou povahu, není totiž polarizované žádným uvedených způsobem. Jednotlivé atomy těchto zdrojů nevysílají světlo spojitě, ale jako krátké pulzy (fotony), které nejsou vzájemně nijak „spojené“, jsou časově i místně omezené, mají různé fáze, polarizace i frekvence – vzniká tedy velmi různorodá „směs“ , je to tzv. ***nepolarizované vlnění*** (záření):

(konec kapitoly) **(K.Rusňák, 01/06)**

27.1.06 oprava přehozených parc.derivací na str. 5-6

16.3.25 drobné překlepy str.4 a 7

Dodatek 1 *(19.11.2015)*

Spektrální vlastnosti světla, měření jeho rychlosti

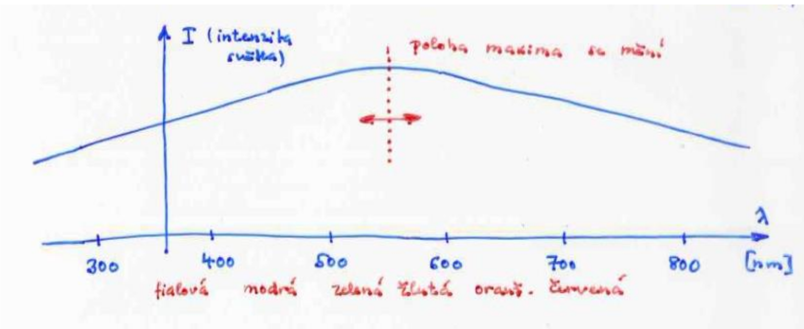
Světlo je tedy elektromagnetické vlnění, které charakterizuje relativně úzký interval vlnových délek, stanovený pro „průměrné“ lidské oko intervalem (380 – 780) nm (1nm = 10^{-9} m)

Používá se také pojem **optické záření** :

Interval 10 nm – až 1 mm (= 1000 µm) ….optické záření, světlo v širším smyslu ,,,,,, UV – VIS - IR
Interval 10 nm – až 380 nm ……………… ultrafialové záření (světlo) ….. UV (UV A-320 nm, UV B-280, UV C-pod 280)
Interval 380 nm – až 780 nm ……..……… viditelné záření (světlo) ……... VIS
Interval 780 nm – až 1 mm ……… …….infračervené záření (světlo) ….. IR (IR A.1400 nm, IR B-2500, IR C-nad 2500)

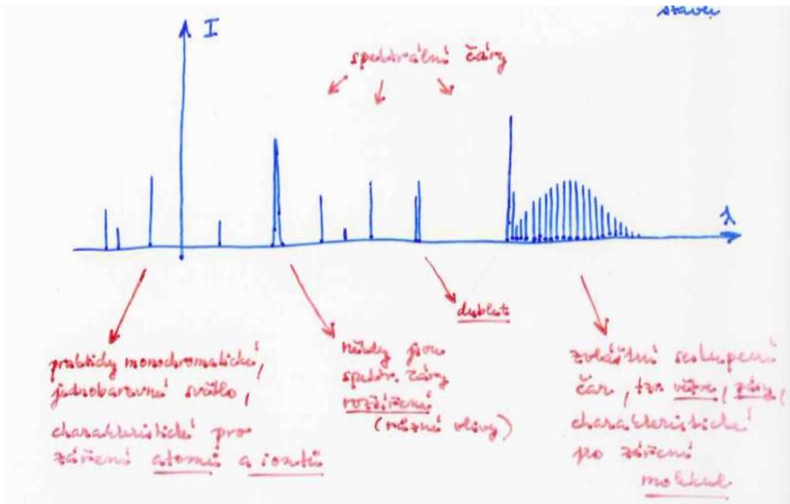
Kromě speciálních zdrojů (lasery,…) vyzařují světlo veškerá zahřátá tělesa - pevná, kapalná i plynná. Jejich záření je charakterizováno různým zastoupením vlnových délek ……. **světelným spektrem** . Změříme ho optickým spektrometrem, který rozloží světlo na jednotlivé vlnové délky pomocí disperzního prvku (hranol, mřížka). Existují dva typické druhy spekter:

a) **spojité spektrum** ……. je typické pro zahřátá tělesa (Slunce)



poloha maxima se mění s teplotou tělesa ……. Wienův posouvací zákon: $\lambda_{max} \, . \, T = konst.$

b) **čarové spektrum** …… vyzařují látky v plynném stavu



Vlnové délky spektrálních čar (i jejich uskupení – pásů, větví) jsou charakteristické pro konkrétní atom (molekulu, iont) ……. jsou proto používány pro identifikaci látek i pro určení jejich koncentrace (je úměrná intenzitě spektrálních čar).

I ve spojitém slunečním spektru existují spektrální čáry ….. jsou to „tmavé“ absorpční čáry (světlo chybí) ……..tzv. **Fraunhoferovy čáry** (označují se písmeny A, B, C, …) …..používají se v praktické optice, zejména:

čára C …….. $\lambda = 656{,}3\ nm$ …….čára H_α vodíku

čára D …….. $\lambda = 589{,}3\ nm$ …….čára Na - dublet

čára e …….. $\lambda = 546{,}1\ nm$ …….čára Hg

čára F …….. $\lambda = 486{,}1\ nm$ …….čára H_β vodíku

Měření rychlosti světla

Již Newton předpokládal ve své Optice, že rychlost světla je konečná - první pokusy o její stanovení (Galileo, 1607, lucerny na dvou kopcích) ale naznačovaly, že je obrovská a vymyká se běžnému měření rychlostí v mechanice ze vzdálenosti a času.

Měřené vzdálenosti by musely být velmi dlouhé ….. astronomické ……proto také první použitelné hodnoty získali hvězdáři:

1675 Olaf Römer ….. pozorování různé doby mezi zákryty Jupiterových měsíců (220 tis. km/s)

1728 James Bradley ….pozorování aberace hvězd (301 tis. km/s)

Až 1849 Armand Fizeau provedl první měření na Zemi, pomocí rotujícího ozubeného kola (315 tis. km/s)

1850 Jean Foucault …. obdobné měření s využitím rotujícího zrcátka (298 000 ± 500 km/s)

Nejpřesnější měření v 19. st. prováděl Albert Michelson pomocí zdokonalené Foucaultovy metody, s využitím interferometru v letech 1879 – 81 ……….z důvodu hledání éteru……………..naposled pak ještě 1926 (299 796 ± 4 km/s)

Ve druhé polovině 20. století bylo dosaženo značného pokroku při **zvyšování přesnosti** měření rychlosti světla, nejprve s využitím dutinových rezonátorů, později technikami laserové interference, např:

1972 K.M.Evenson et.al., National Bureau of Standards (NBS), Boulder, Colorado (299 792 456,2 ± 1,1 m/s)

…………………………

1975 …15. CGPM (Conférence Générale des Poids et Mesures)

……… doporučila definovat rychlosti světla jako explicitní, absolutně přesnou konstantu:

$$\boxed{c = 299\,792\,458 \quad m/s}$$

1983 …17. CGPM …… využití přesné rychlosti světla pro novou definici metru

1 metr je roven délce dráhy, kterou urazí světlo ve vakuu za časový interval 1/299 792 458 sekundy.

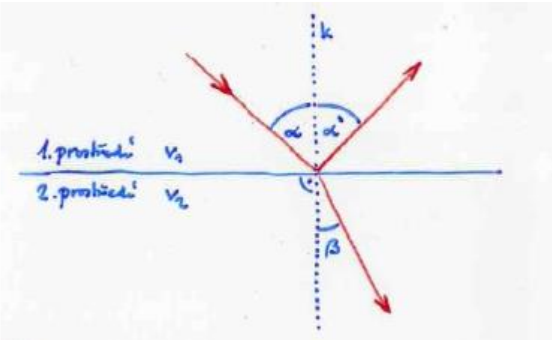
Dodatek 2 *(19.11.2015)*

Disperze světla

Rychlost světla hraje důležitou roli v základních zákonech optiky (paprskové) :

Zákon odrazu a lomu světla

Světelný paprsek prochází 1. prostředím, kde je jeho rychlost v_1 .... a dopadá na rovinné rozhraní se 2. prostředím, ve kterém je jeho rychlost v_2 .
Pak se část světla odrazí zpět do 1. prostředí a část vniká do 2. prostředí.
Vznikají tak dva paprsky – odražený a lomený - které spolu s kolmicí v místě dopadu leží v jedné rovině a platí:



$$\boxed{\alpha = \alpha'}$$ ***zákon odrazu***

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}}$$ ***zákon lomu*** (Snellův zákon)

Přitom se tedy definuje nová veličina:
n_{12} ……… **relativní index lomu** (2. prostředí v vzhledem k 1. prostředí)

Nevýhodou relativního indexu lomu je to, že závisí na dvou parametrech (prostředích).
Proto se zavádí absolutní veličina, daná vlastnostmi pouze jednoho prostředí:

Absolutní index lomu

$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

c …… rychlost světla ve vakuu
v …… rychlost světla v daném prostředí

Absolutní index lomu zkoumaného prostředí tedy popisuje lom světla z vakua do tohoto prostředí.

Lze ho jednoduše zavést do zákona lomu:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\dfrac{c}{v_2}}{\dfrac{c}{v_1}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (= \; n_{12}\;)$$

Absolutní index lomu je základní optická charakteristika prostředí:

- pro vakuum je $n = 1$
- pro hmotné prostředí je vždy $n > 1$, např.

  voda ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,$1{,}33$
  sklo ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,$1{,}45 - 1{,}95$
  vzduch ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,$1{,}0003$……… tj. prakticky jako vakuum!

Čím je index lomu větší ……tím je rychlost světla menší …..prostředí označujeme jako **opticky hustší**

Disperze světla

Rychlost světla ve vakuu je pro všechny barvy světla stejná, ale ve hmotném prostředí je funkcí vlnové délky:

$v = v\,(\lambda)$

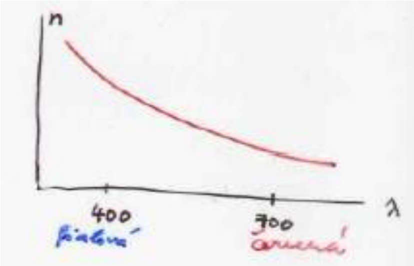
Proto také absolutní index lomu $n = c/v$ musí záviset na vlnové délce:

$$\boxed{n = n(\lambda)}$$

Pak prostředí má **disperzní** vlastnosti ………nastává **jev disperze** (rozklad) světla:

Protože indexy lomu paprsků různých barev (s různou λ) jsou různé, pak při lomu složeného (bílého) světla - při daném úhlu dopadu α se různobarevné paprsky lámou pod různými úhly lomu β ……….. dochází tím k **rozkladu** světla na jednotlivé paprsky a vzniká světelné **spektrum** (viz níže) – využití ve **spektroskopii**

U většiny látek klesá index lomu s vlnovou délkou,
to je tzv. **normální disperze** .



Pozn: Výjimečně, a jen v úzkém intervalu vlnových délek, mají některé látky tzv. **anomální disperzi**, kdy index lomu s vlnovou délkou roste.

Tedy jestliže např. pro vlnové délky červeného a fialového světla platí:

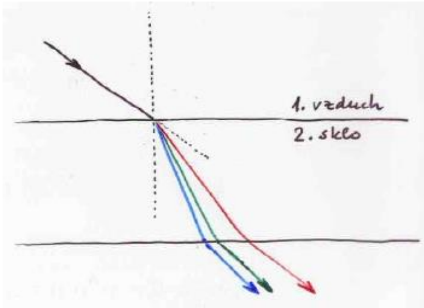
$\lambda_{červ} \;>\; \lambda_{fial}$,

potom bude $\quad n_{červ} \;<\; n_{fial}$

a ze Snellova zákona plyne pro úhly lomu:

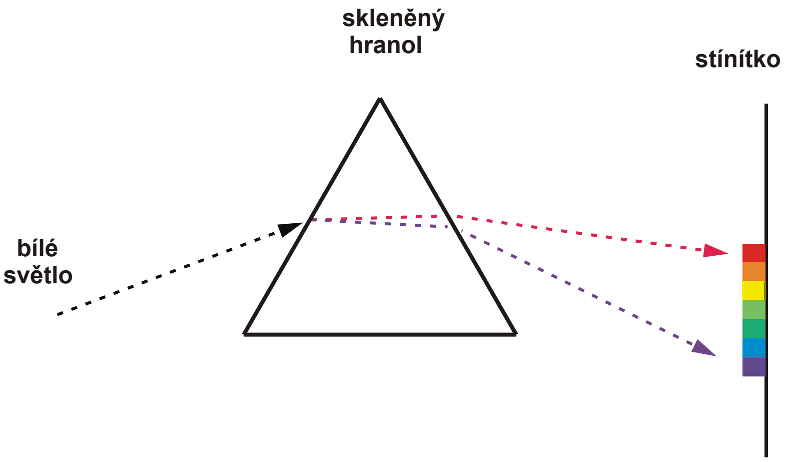
$$\beta_{červ} \;>\; \beta_{fial}$$

tedy <u>více se láme</u> světlo s kratší vlnovou délkou



Aplikace

1) Vznik spektra ve hranolovém spektrometru (monochromátoru) :



2) **Při optickém zobrazení je ale disperze nežádoucím jevem**
……… způsobuje tzv. **barevnou vadu** optických prvků (čoček)

3) **Průběh funkce $n = n(\lambda)$ lze pro každou látku samozřejmě přesně stanovit,** v praktické optice se ale často udává jen hodnota pro 3 vlnové délky – pro vybrané Fraunhoferovy čáry:

C ……..D (e) …….. F

červená *žlutá* *modrá*

Příslušné hodnoty indexu lomu se označují: n_C , n_D , n_F

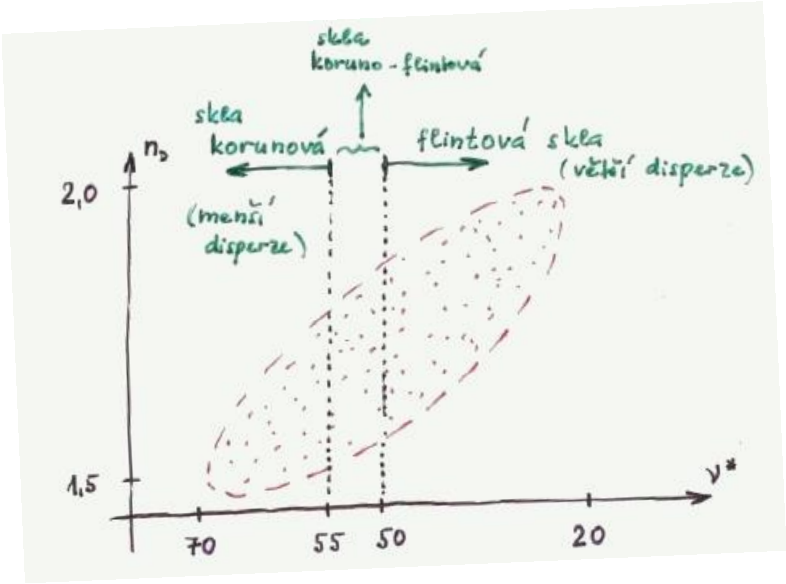
Za základní hodnotu indexu lomu se považuje $\boxed{n_D}$ (pro žluté světlo, přibližně ve středu intervalu viditelného světla)……… a dále se definují veličiny:

$\boxed{\mu = n_F - n_C}$ ***<u>střední disperze</u>***

$\boxed{\nu = \dfrac{n_F - n_C}{n_D - 1}}$ ***<u>střední relativní disperze</u>***

$\boxed{\nu^* = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{n_D - 1}{n_F - n_C}}$ ***<u>Abbeho číslo</u>*** (převrácená střední relativní disperze)

Optická skla se vyrábějí v širokém rozsahu indexů lomu a Abbeho čísel:



$$\boxed{n_D \in (1{,}45 \;\ldots\; 1{,}95)}$$

$$\boxed{\nu^* \in (20 \;\ldots\; 70)}$$

Např. určité korunoflintové sklo:

$$\left.\begin{aligned} n_C &= 1{,}5114 \\ n_D &= 1{,}5127 \\ n_F &= 1{,}5253 \end{aligned}\right\} \nu^* = 52$$

Pro srovnání: voda

$$\left.\begin{aligned} n_C &= 1{,}3314 \\ n_D &= 1{,}3332 \\ n_F &= 1{,}3373 \end{aligned}\right\} \nu^* = 56$$

4) **Disperzní jev je důležitý při studiu přenosu energie zářením** (vlněním)

Teoreticky si znázorňujeme vlnění jako nekonečný útvar - ale reálné vlny jsou konečné v čase i v prostoru a lze si je představit jako vlnové grupy (vlnová klubka) - a jejich rychlost – tzv. **grupová rychlost** není automaticky shodná s fázovou rychlostí vlnění (viz 1. semestr fyziky), protože obě tyto rychlosti se počítají podle jiných vztahů:

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Když uvážíme, že vlnová klubka obsahují všechna maxima vln (kmitů) - a maxima vždy určují celkovou energii kmitavého pohybu (viz vzorec pro energii netlumených i tlumených kmitů) – pak jejich pohyb určuje pohyb energie a můžeme tedy konstatovat:

Energie vlnění (a přenášené informace) se prostorem šíří grupovou rychlostí.

Pro výpočet grupové rychlosti tedy musíme derivovat úhlovou frekvenci podle úhlového vlnočtu

Protože pro úhlovou frekvenci platí:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} = c \cdot k$$

musíme tedy derivovat součin dvou veličin - výsledek derivace bude proto principiálně záviset na tom, jestli je fázová rychlost konstanta nebo funkce. Proto rozlišíme:

1) Fázová rychlost vlnění v daném prostředí je ***konstantní*** *- nezávisí na vlnové délce – tedy ani na úhlovém vlnočtu. Říkáme, že takové* ***prostředí nemá disperzi*** *– příkladem je vakuum.*

Pak je derivace úhlové rychlosti jednoduchá :

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(c \cdot k) = c$$

Grupová rychlost v bezdisperzním prostředí je rovná fázové rychlosti.

1) Druhou možností pak je, že fázová rychlost závisí ***na vlnové délce****. Pak monochromatické vlny různých vlnových délek mají v daném prostředí různé fázové rychlosti –* ***prostředí má disperzi*** *– takové je běžné látkové prostředí, například sklo.*

V tomto případě je tedy fázová rychlost funkcí :

$$c = v = v(\lambda) = v(k)$$

Úhlová rychlost je pak komplikovanější funkcí vlnočtu než u bezdisperzního prostředí :

$$\boxed{\omega(k) = c \cdot k = v \cdot k = v(k) \cdot k}$$

disperzní vztah (relace)

A grupová rychlost bude :

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v \cdot k) = v + k \cdot \frac{dv}{dk} \neq v$$

V disperzním prostření se grupová rychlost liší od rychlosti fázové

a je zřejmé, že podle znaménka derivace může být větší i menší než fázová rychlost.

Rozlišíme tedy dále :

a) *Jestliže bude tato* ***derivace záporná*** - tzv. ***normální disperze*** *, tj. když fázová rychlost klesá s úhlovým vlnočtem (tedy roste s vlnovou délkou a index lomu klesá), pak grupová rychlost vždy vychází menší než fázová rychlost :*

$$v_{gr} = v + k \cdot \frac{dv}{dk} < v$$

b) Jestliže fázová rychlost bude mít ***kladnou derivaci*** *, tj. když fázová rychlost roste s úhlovým vlnočtem (a tedy klesá s vlnovou délkou), pak grupová rychlost vždy vychází větší než fázová rychlost :*

$$v_{gr} = v + k \cdot \frac{dv}{dk} > v$$

To je případ tzv. ***anomální disperze*** , kterou pozorujeme u látkových prostředí výrazně méně často (jen u některých látek a jen v okolí vlnových délek, které tyto látky silně absorbují)

……………………………………………….. (Konec dodatků) ………………