

Toto dílo podléhá této licenci: Creative Commons 4.0 BY-SA



Zdroj: <https://predmety.fbmi.cvut.cz/cs/doktorske-bme>

CT - Výpočetní tomografie



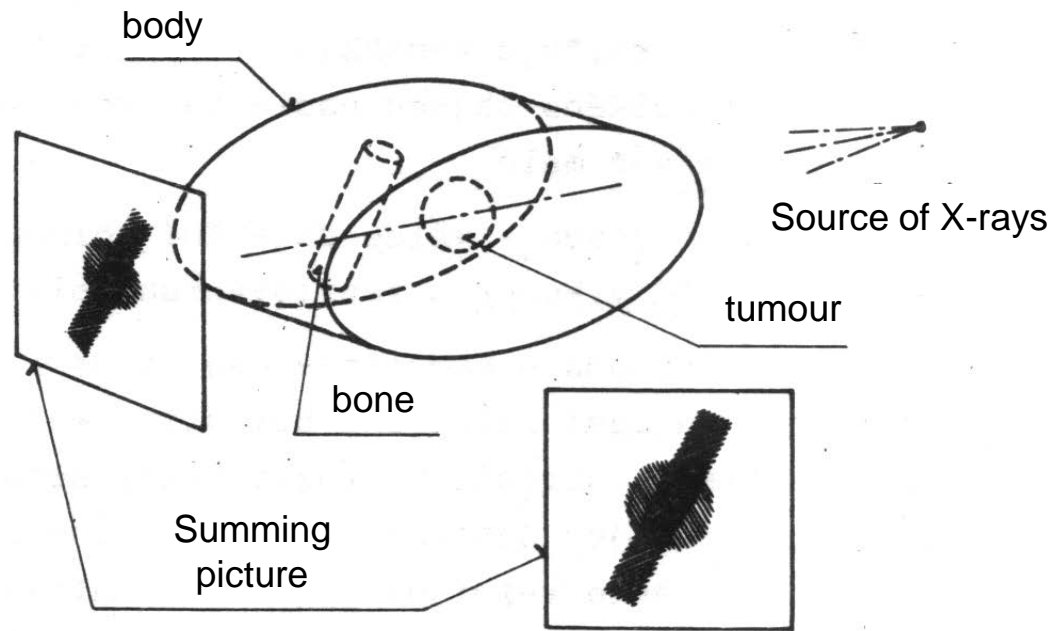
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Disadvantages of X-ray Imaging

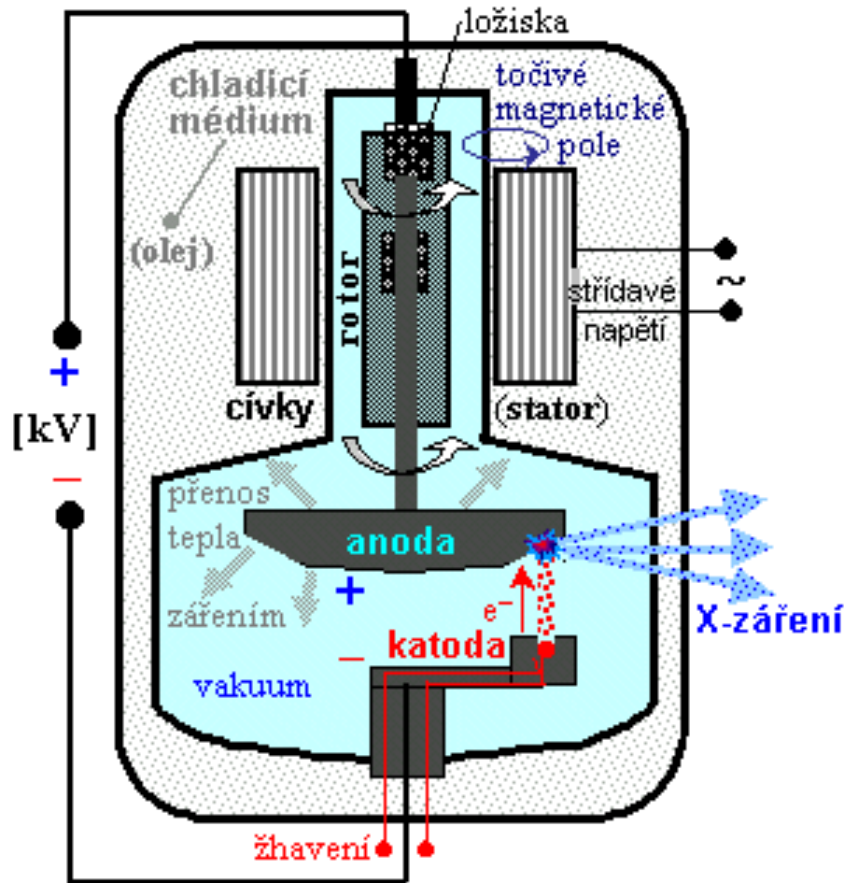
1. 3D -> 2D, tzv. summing image, i.e. organs in a few planes over each other are superponed in classical X-ray.



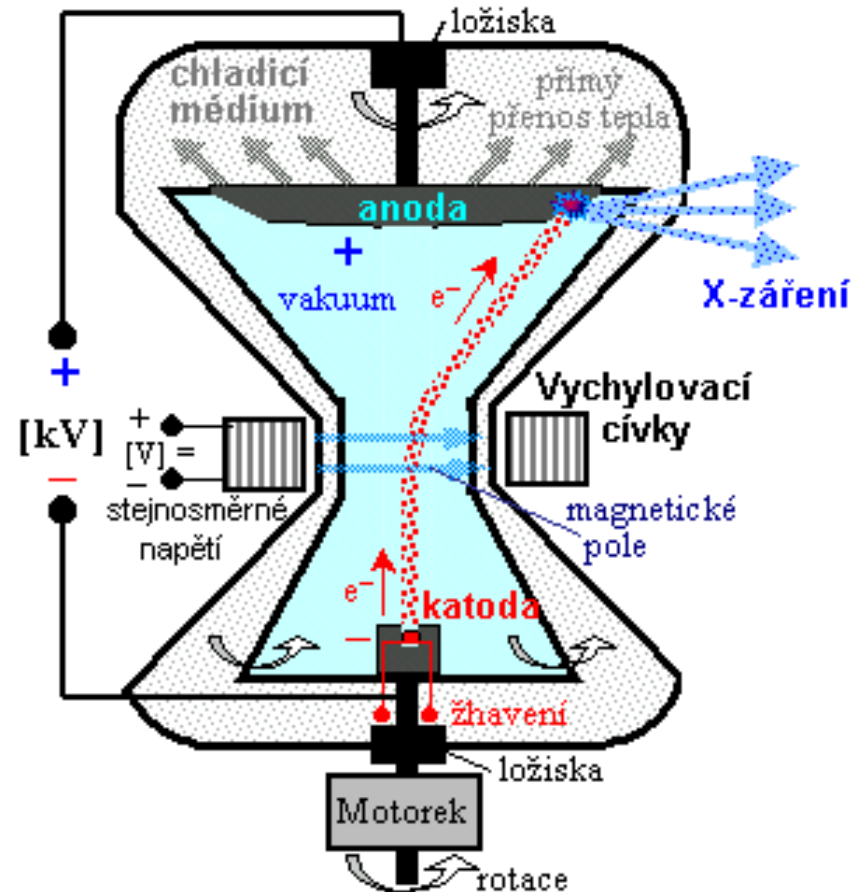
CT přístroj



Princip rentgenky



Rentgenka s excetrickou katodou a s anodou rotující uvnitř vakuové trubice

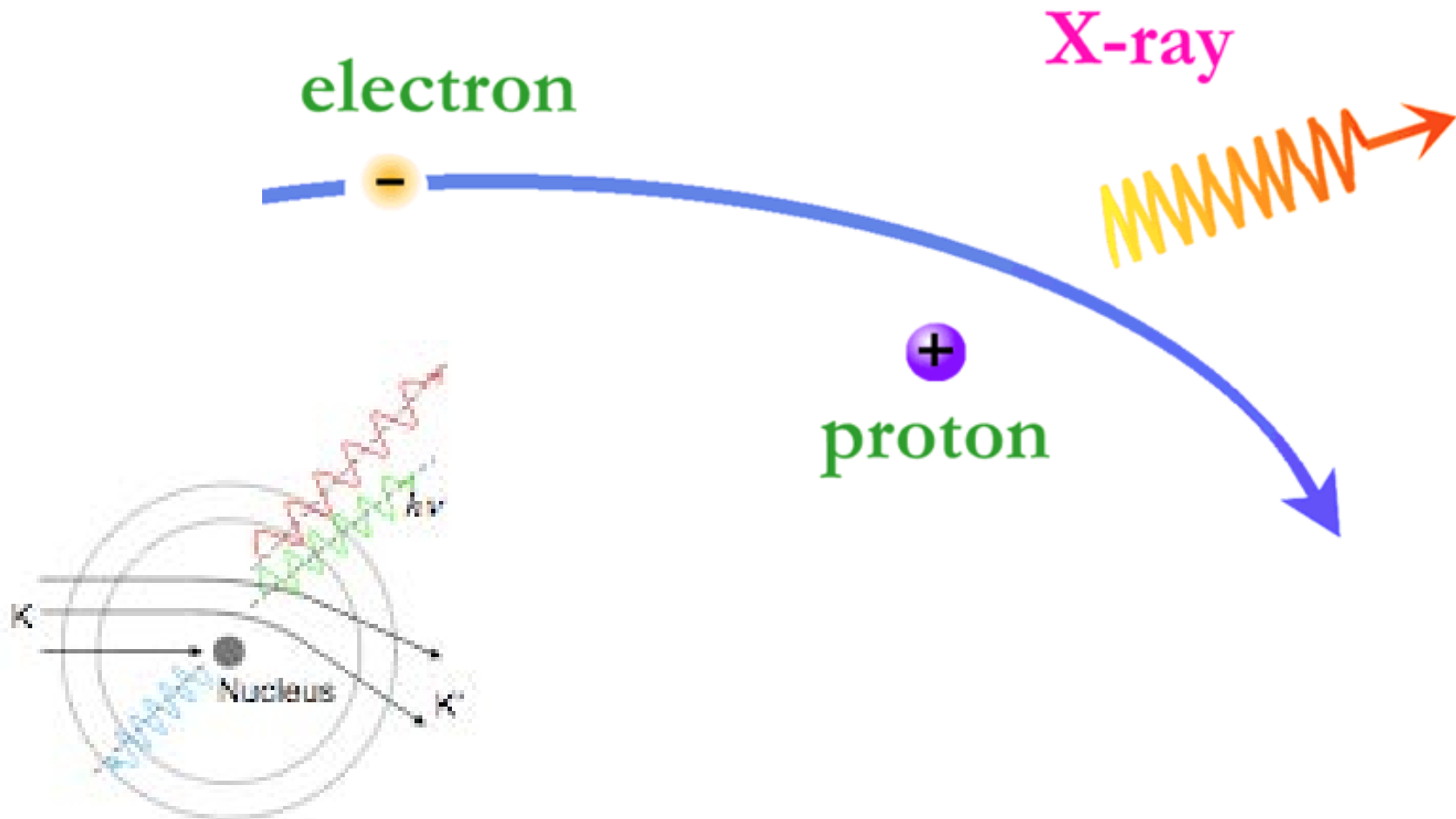


Rentgenka rotující jako celek s čelní anodou a magnetickým vychylováním elektronového svazku

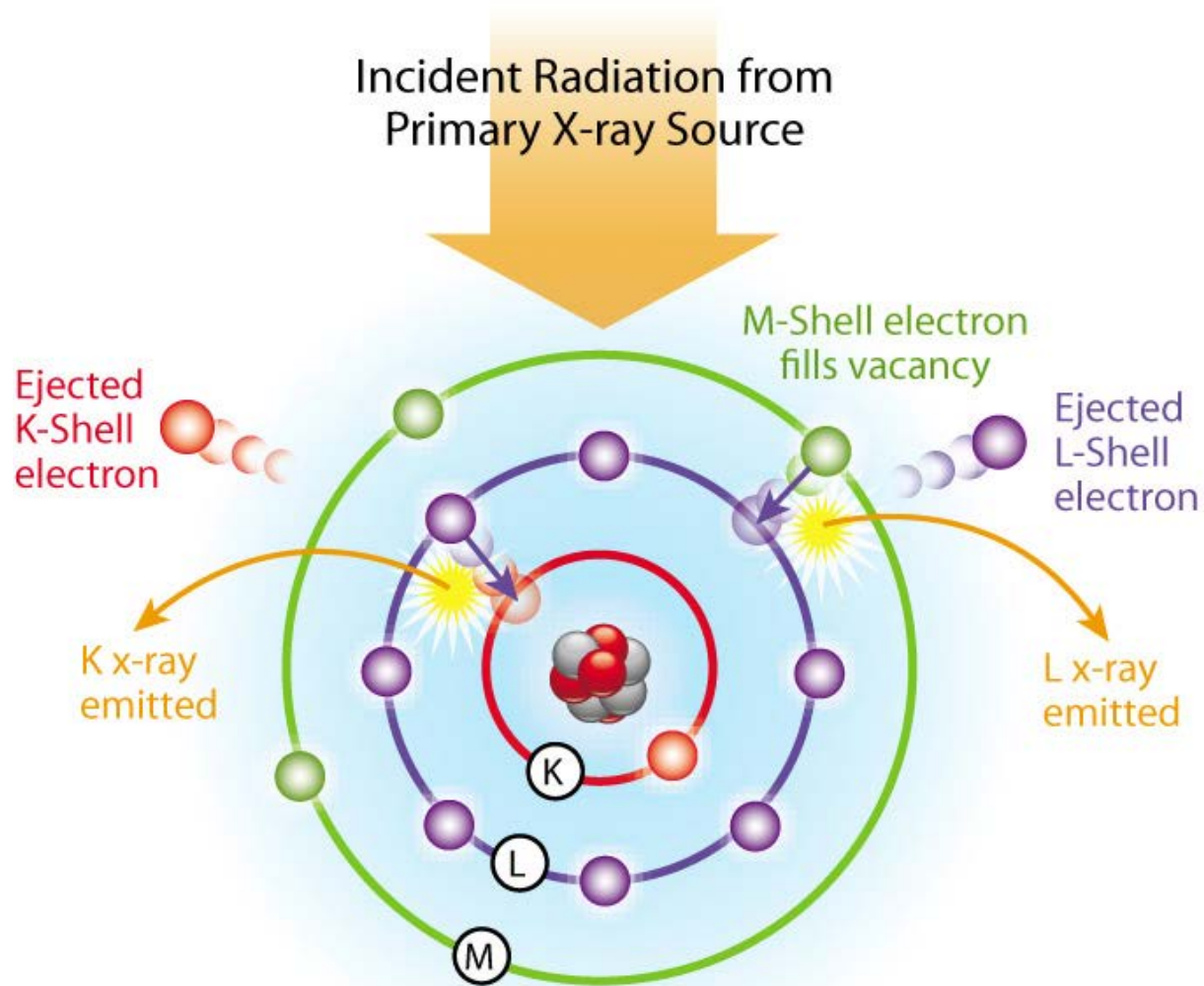
* youtube.com: x-ray tube alive.

Stratonova rentgenka

Brzdné záření



Charakteristické záření



Parametry rentgenky I

Anodové napětí U [kV] - vysoké napětí přiváděné mezi katodu a anodu, určuje maximální i střední **energii** fotonů výsledného X-záření, jeho "tvrdost". Maximální energie X-záření v [keV] se číselně prakticky rovná anodovému napětí **U** v [kV], střední energie je o něco vyšší než 1/3 max. energie. Se zvyšujícím se anodovým napětím se celé spektrum X-záření posunuje směrem k vyšším energiím (kratším vlnovým délkám) a zvyšuje se relativní podíl vyšších energií (tvrdší krátkovlnné složky).

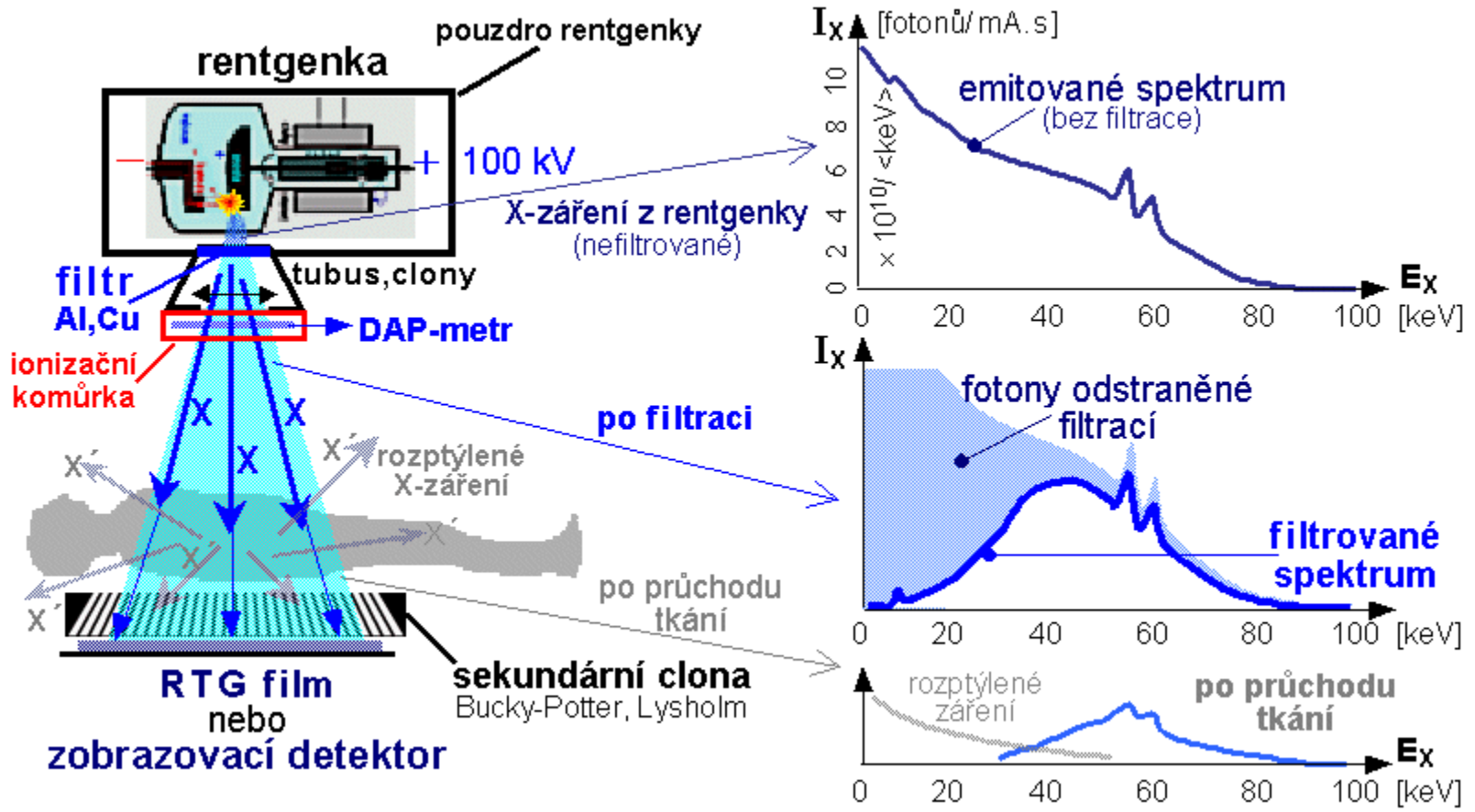
Anodový proud I [mA] protékající rentgenkou určuje **intenzitu** (fluenci) X-záření emitovaného rentgenkou I_x . Lze jej nejsnadněji regulovat **změnou žhavení katody** - žhavicího proudu - a tím **teploty** vlákna katody. Žhavicí proud lze regulovat jednoduše pomocí *reostatu* ve žhavicím obvodu nebo nověji speciálními elektronickými obvody osazenými tranzistory a tyristory. Při vyšším žhavení vlákna katody je emitováno více elektronů, rentgenkou protéká větší proud elektronů a je vyzařována vyšší intenzita X-záření. Průměrný proud rentgenkou se pohybuje v rozmezí jednotek mA až asi 200mA, špičkový proud může být i podstatně vyšší (v pulzním režimu)

Parametry rentgenky II

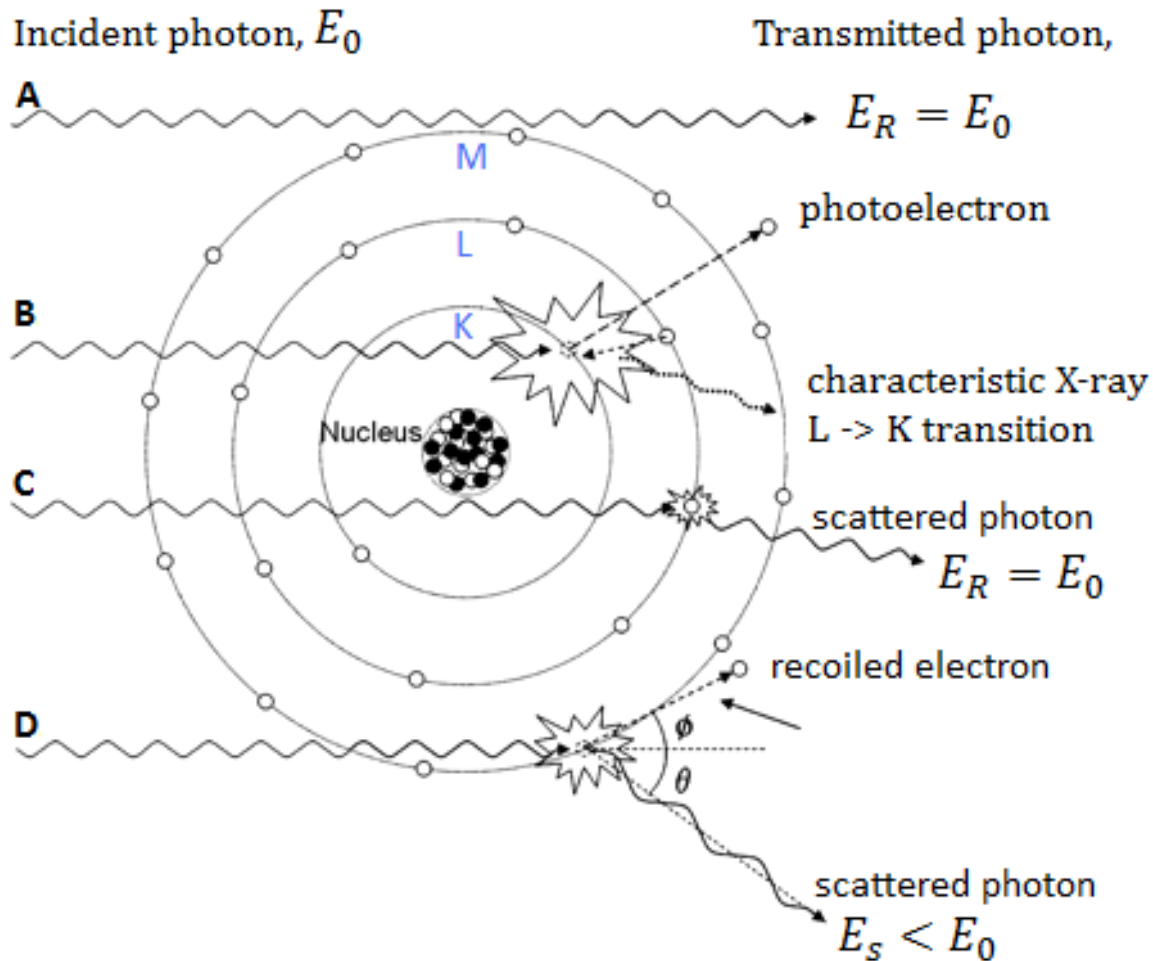
Expozice je celkové množství fotonů X-záření, které určuje kvalitu rtg snímků a též radiační zátěž pacienta. Je dána součinem intenzity záření I_x (fluence fotonů /s) a expozičního času T - je tedy úměrná součinu **anodového proudu** rentgenkou [mA] a **expozičního času** [s]: "miliampér-sekundy" **mA.s = Q**, což je celkový **náboj** Q neboli **elektrické množství**, které při expozici projde rentgenkou

Pro každý druh rtg vyšetření je na základě empirických zkušeností stanovena doporučená hodnota anodového napětí [kV] a expozice [mAs], poskytující kvalitní zobrazení požadovaných struktur, při relativně nízké radiační zátěži. U některých přístrojů se používá i **expoziční automatika**, která po dosažení určitého předvoleného "množství" X-záření elektronicky vypne anodové napětí v generátoru - a tím i expozici.

Energetické spektrum



Interakce rtg fotonů s tkání



A. TRANSMITTED UNAFFECTED
No interaction

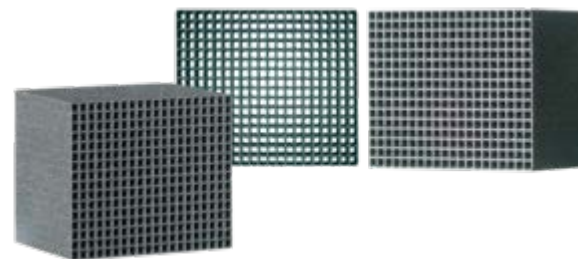
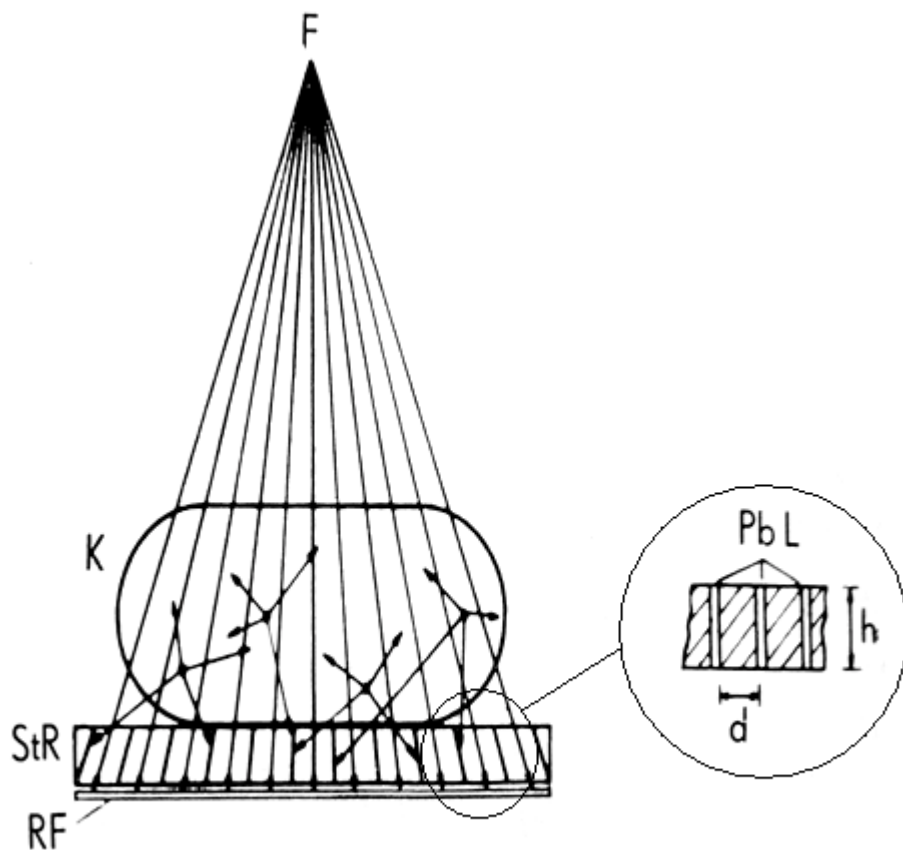
B. PHOTOELECTRIC ABSORPTION
Collision with a tightly bound inner-shell electron

C. RAYLEIGH SCATTERING
Elastic collision with a bound outer-shell electron

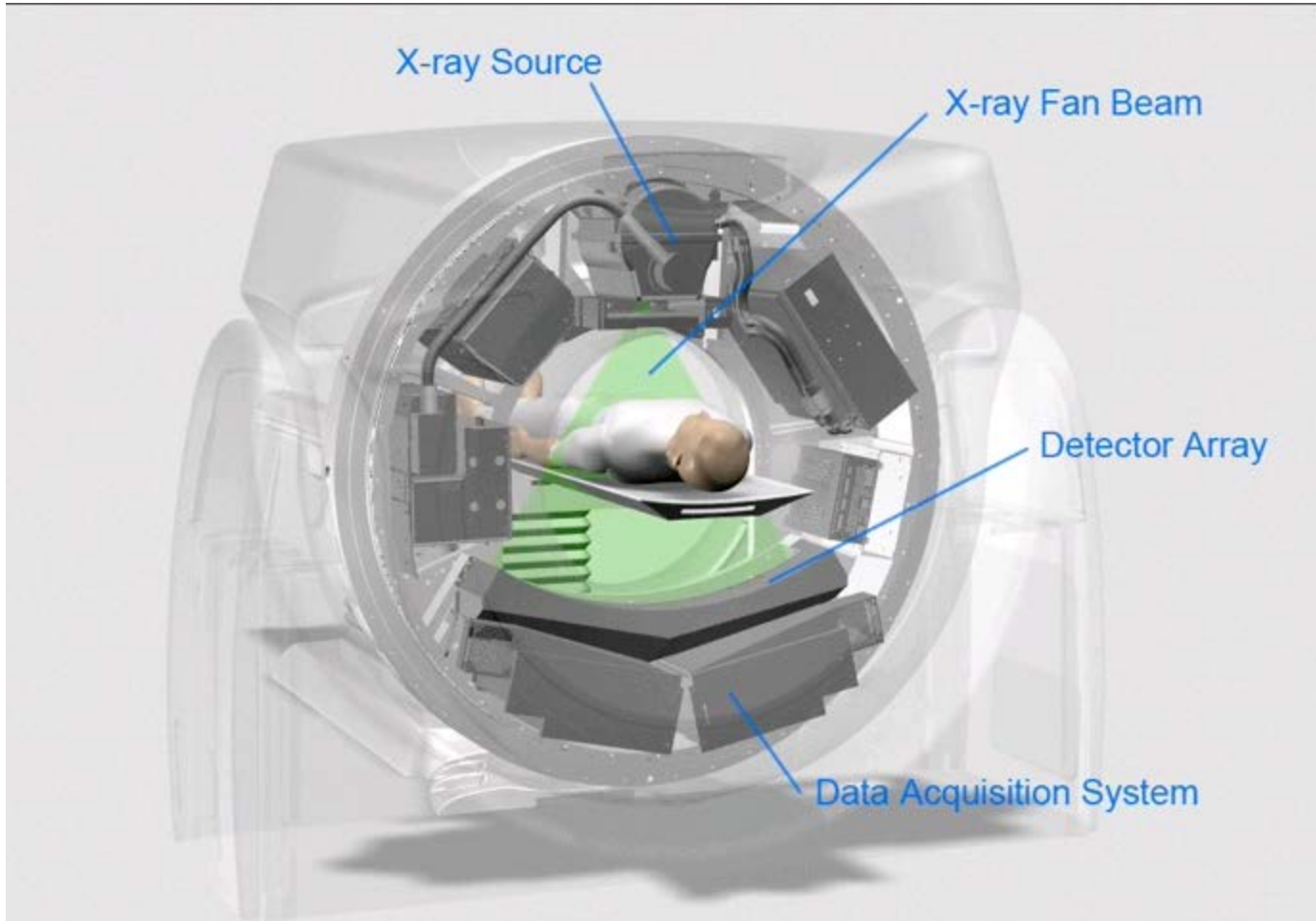
D. COMPTON SCATTERING
Inelastic collision with weakly bound outer-shell electron

Sekundární clona - kolimátor

- Rozptýlené fotony jsou částečně pohlceny sekundární clonou – kolimátorem.

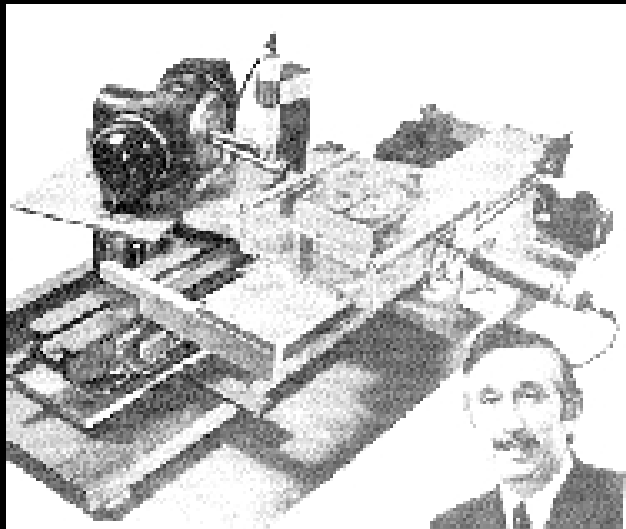


CT device principle



Slip ring system - transfer of data

Sir Godfrey Hounsfield
Nobel Prize in Medicine, 1979



[2]

Gamma Ray Source: 28,000
measurements, 9 day collection,
2.5 hour recon, 2hour display.

X-ray source reduced collection
to 9 hours. Clinical model
took 18 sec

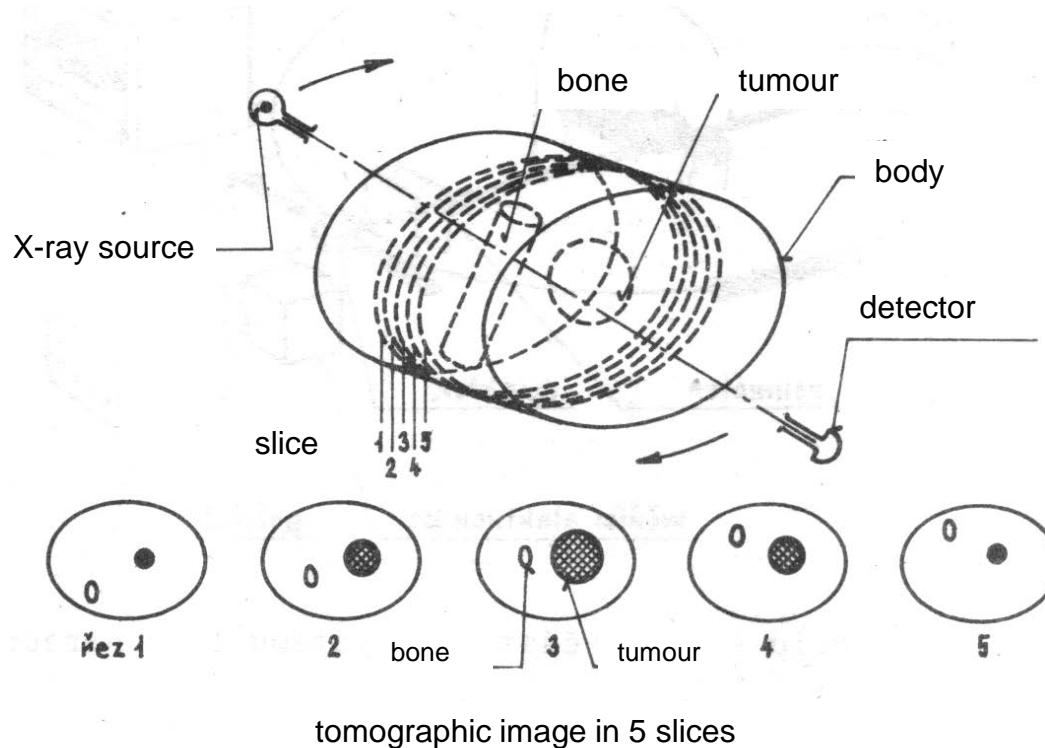


[1]

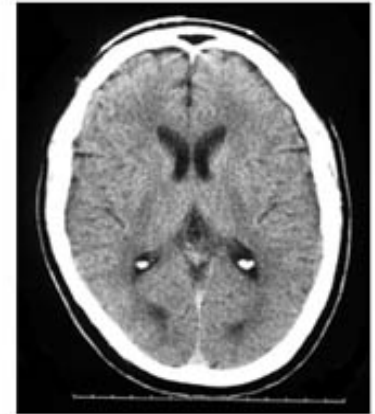
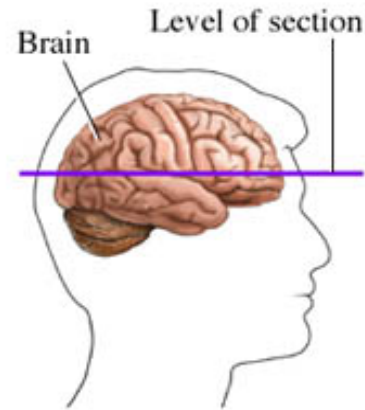
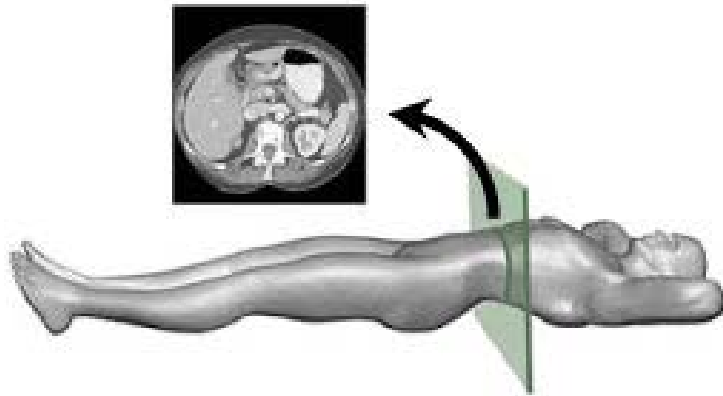
EMI-1, 1971:
Atkinson Morley Hospital, England

Základní princip CT

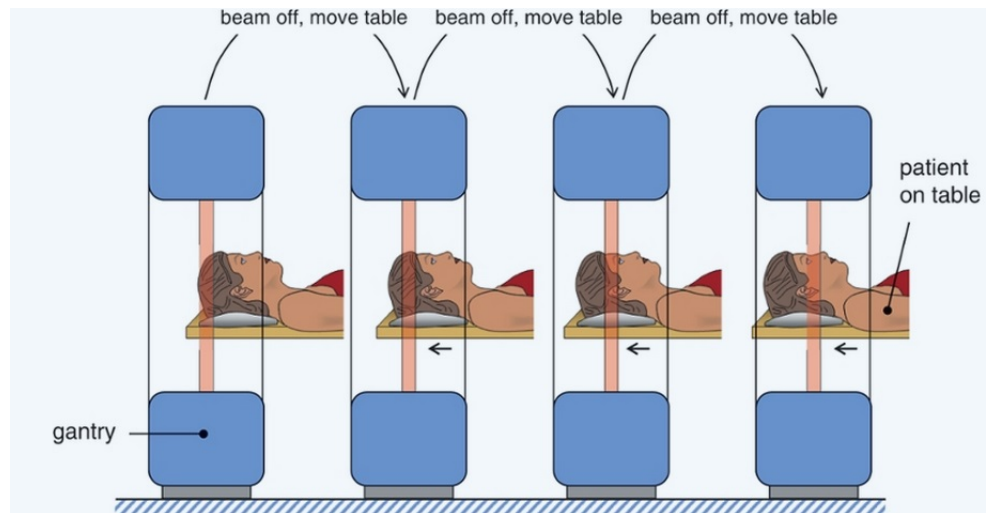
CT vytváří obraz těla pacienta jako sérii tomografických řezů. Každý řez je vytvořen jako matematická rekonstrukce objektu ze znalosti jeho projekcí do různých úhlů.



Vznik CT řezu

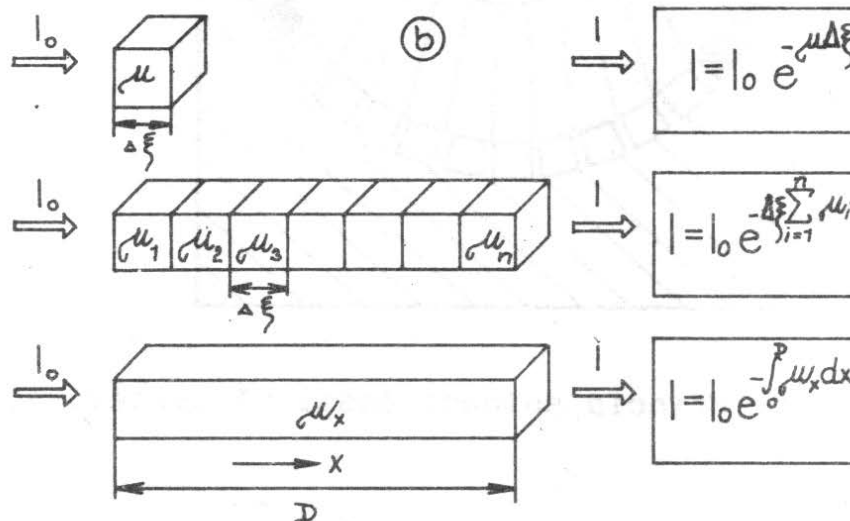
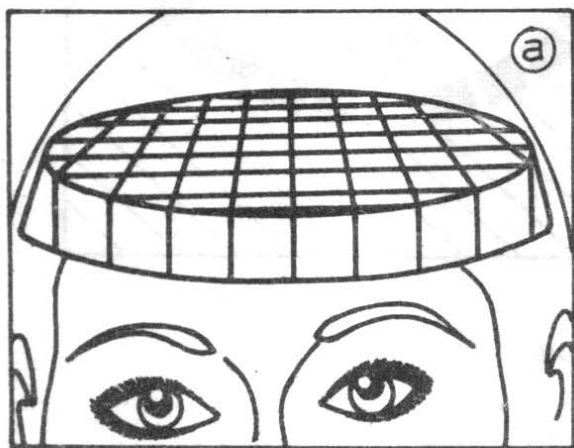


CT scan

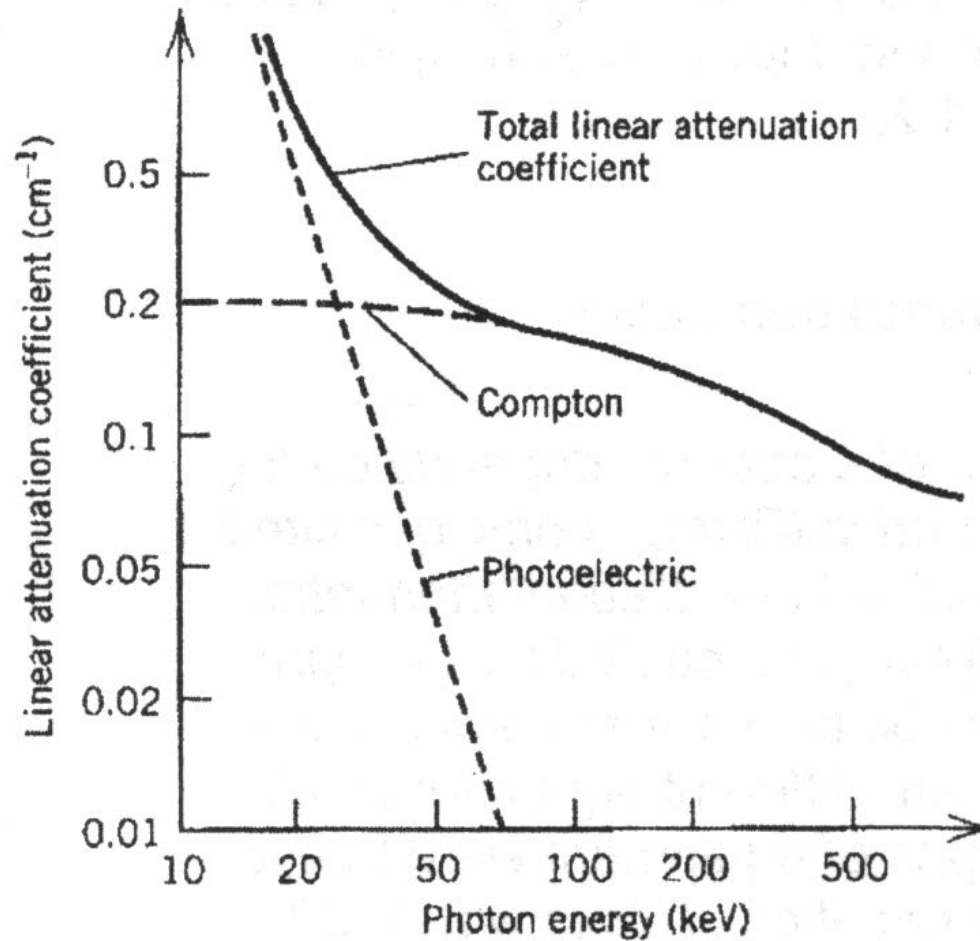


Základní princip CT pokr.

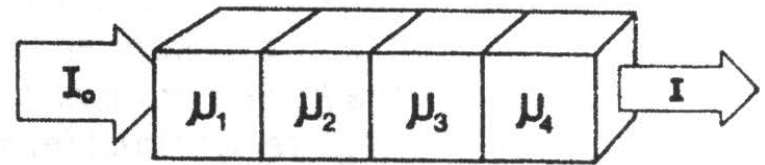
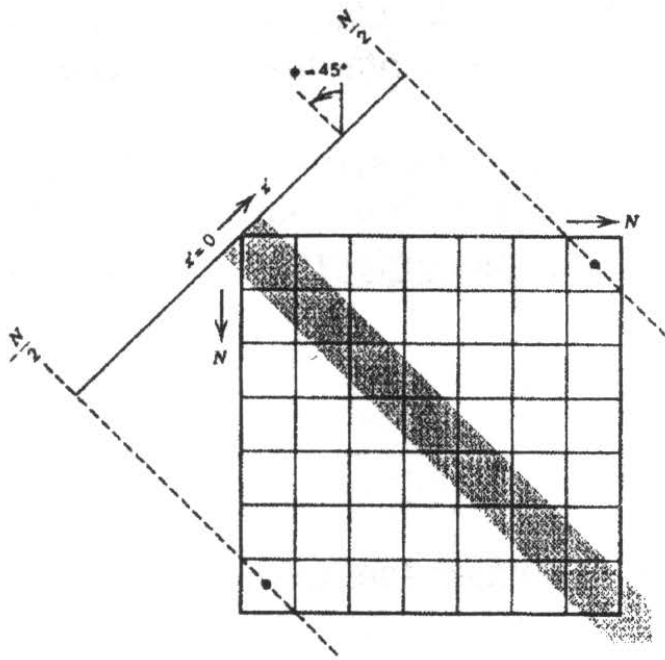
Každý řez objektu je rozdělen na síť elementů-voxelů se čtvercovou základnou a konstantní hodnotou útlumu rentgenovského záření (μ).



Útlum rentgenovského záření

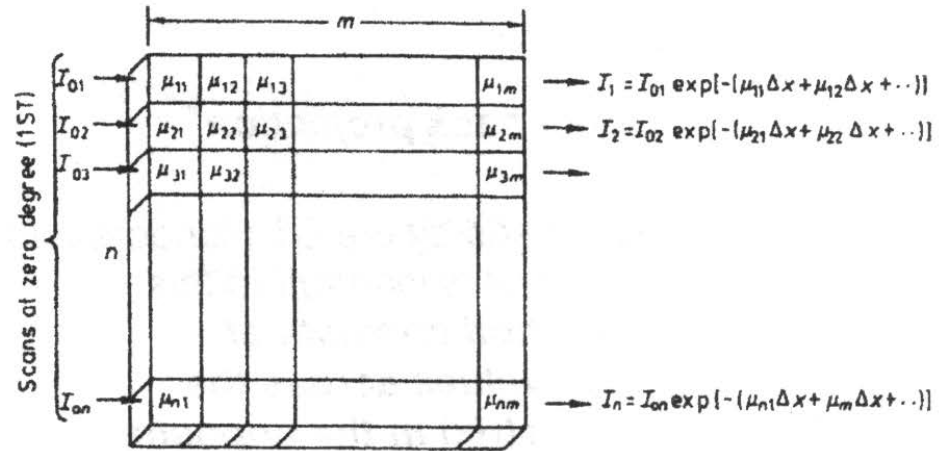


Základní princip CT pokr.



$$I = I_0 e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)x}$$

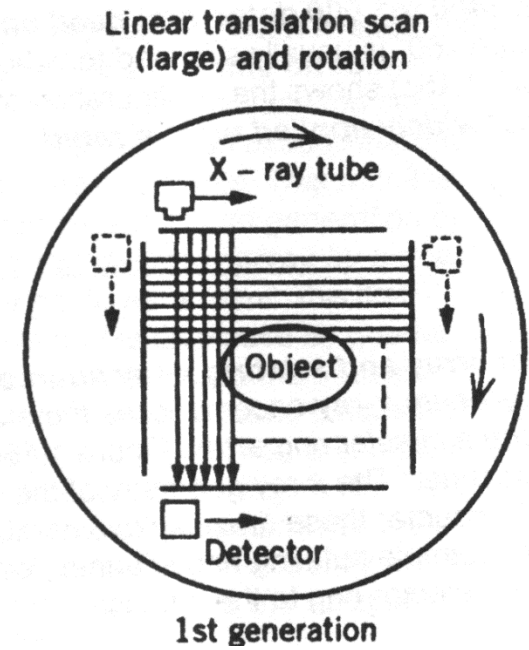
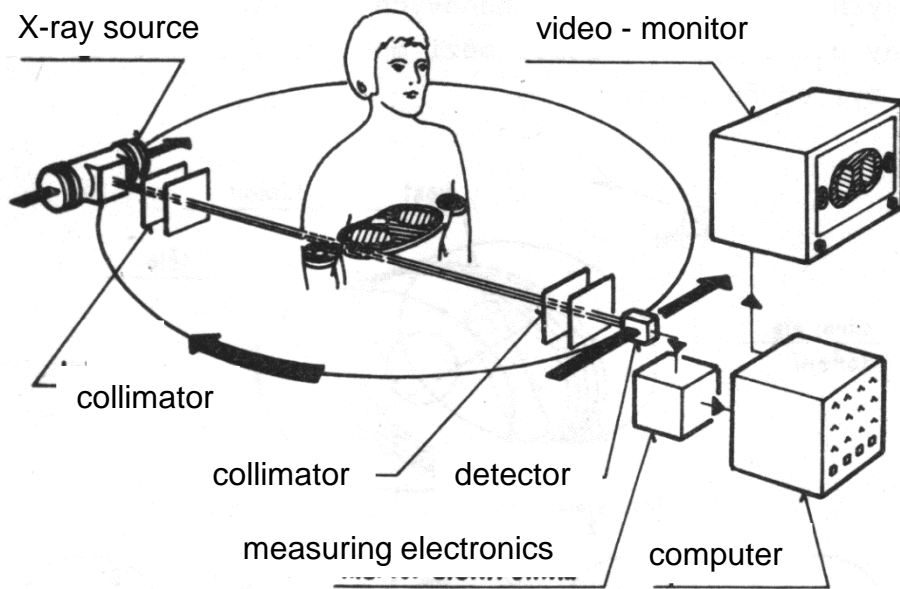
(a)



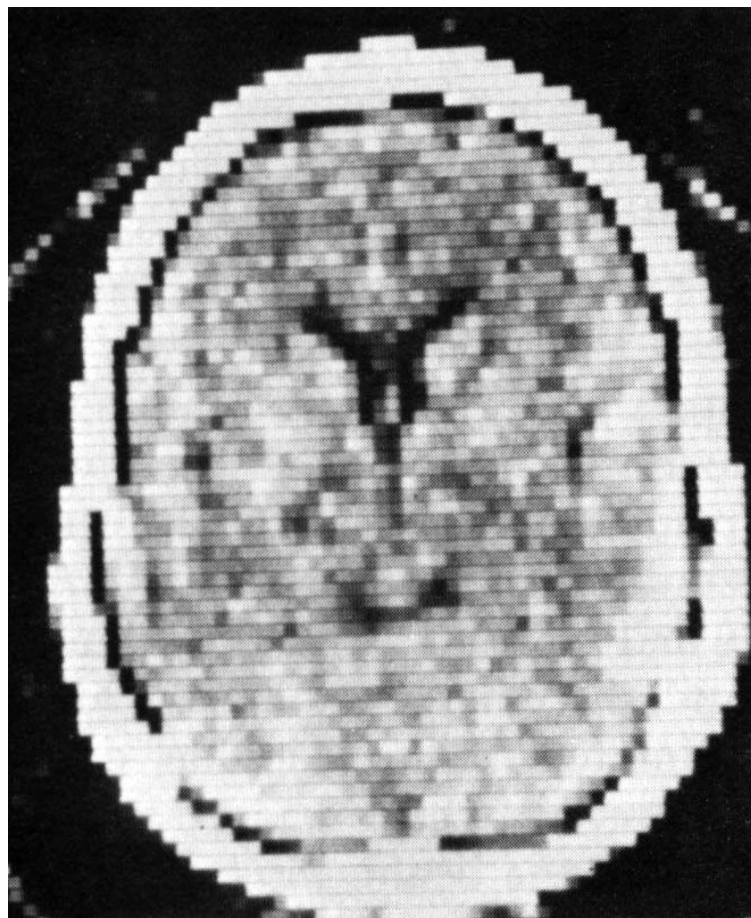
Tomographic acquisition

- Single transmission measurement through the patient made by a single detector at a given moment in time is called a *ray*.
- A series of rays that pass through the patient at the same orientation is called a *projection* or *view*.
- Two projection geometries have been used in CT imaging:
 - *Parallel beam geometry* with all rays in a projection parallel to one another
 - *Fan beam geometry*, in which the rays at a given projection angle diverge

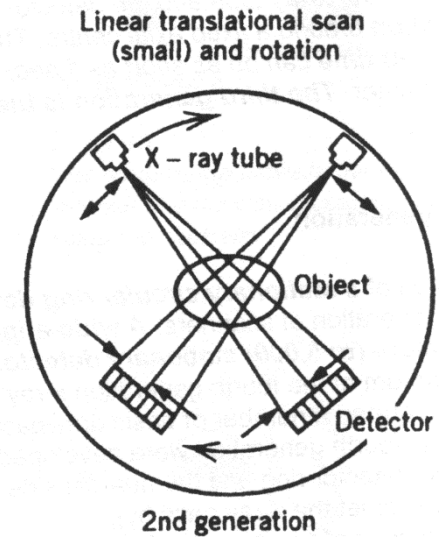
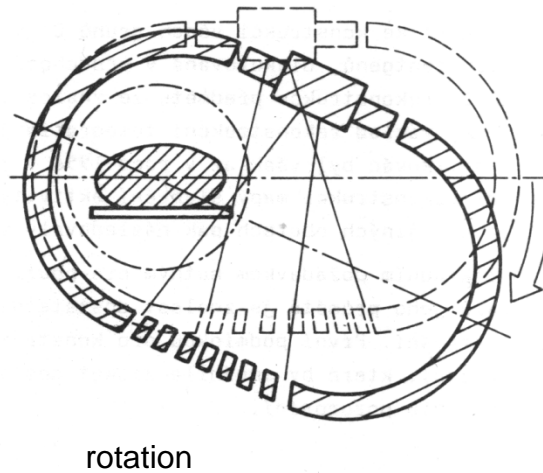
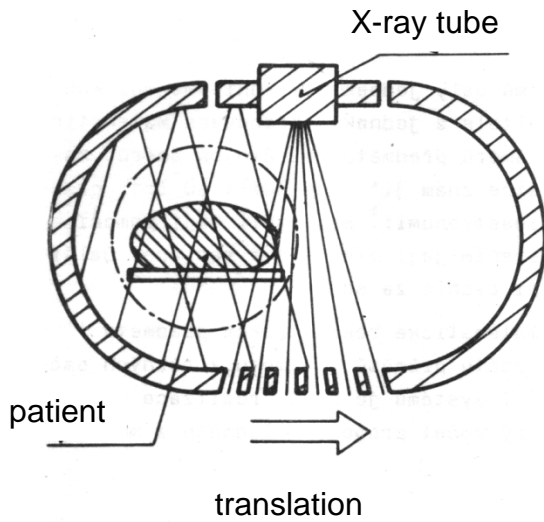
CT 1. generace



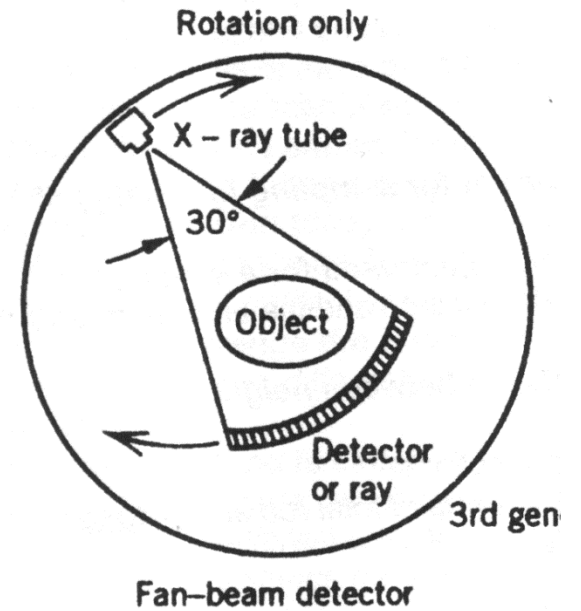
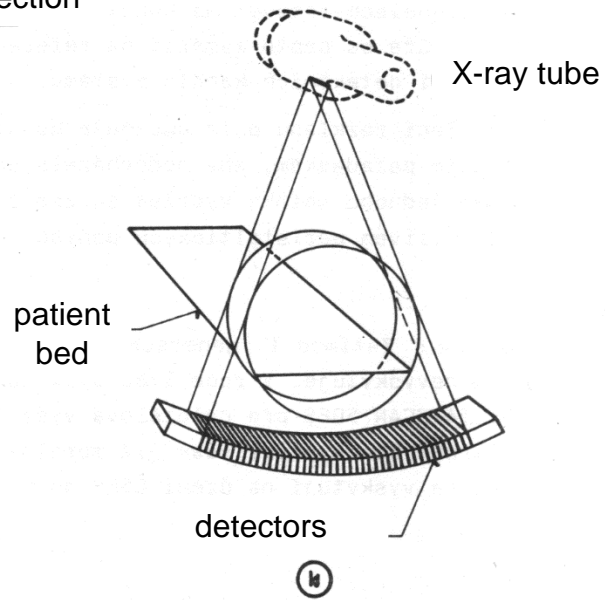
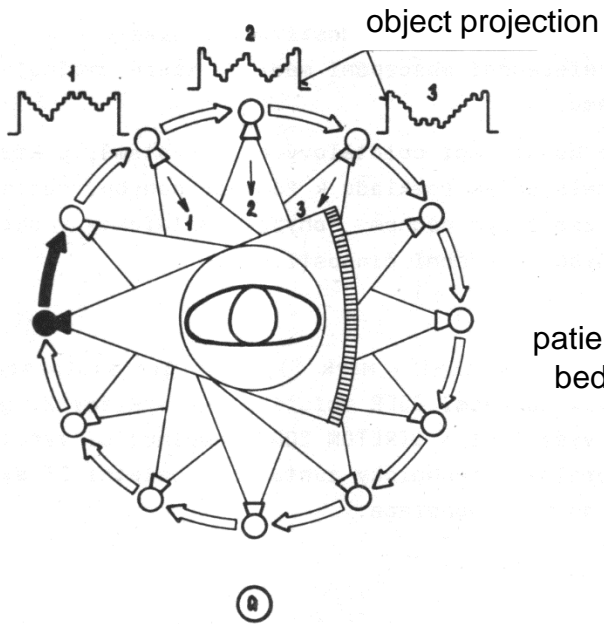
EMI Mark 1



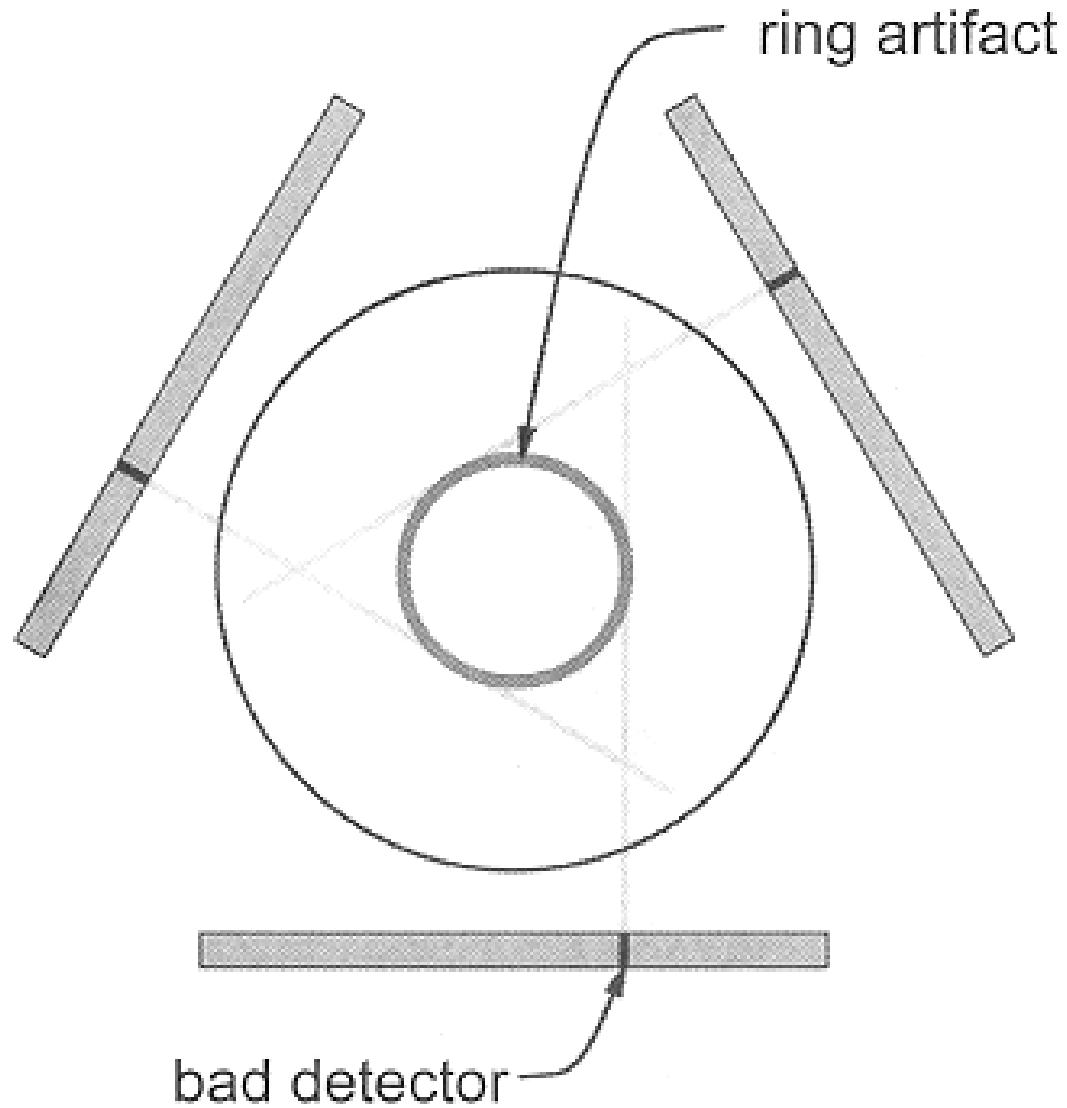
CT 2. generace



CT 3. generace

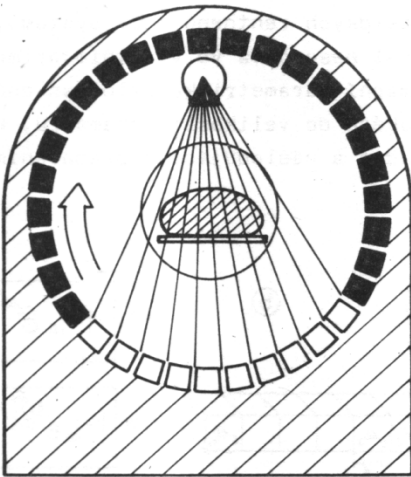


Kruhový artefakt

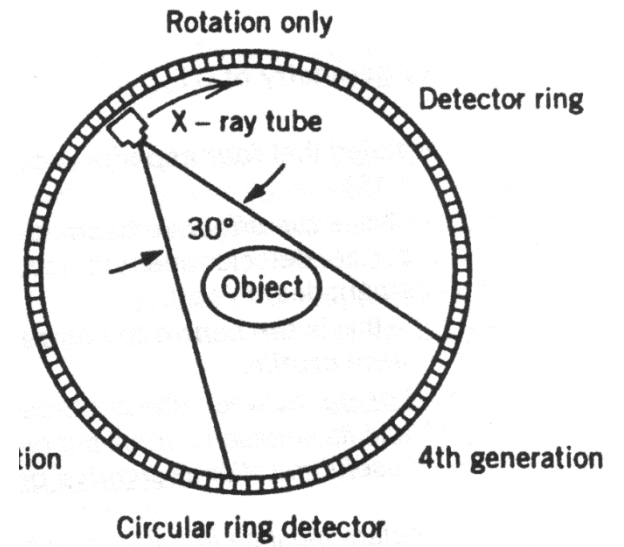
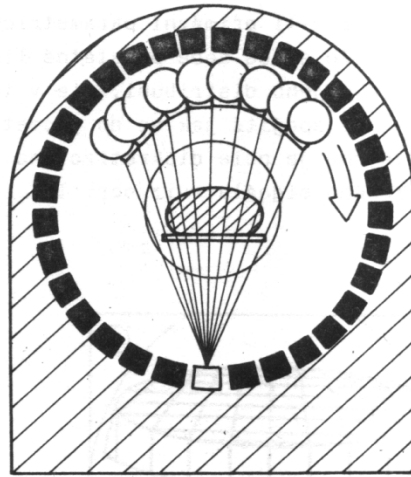


CT 4. generace

fan beam of x-rays



inversed fan beam of x-rays

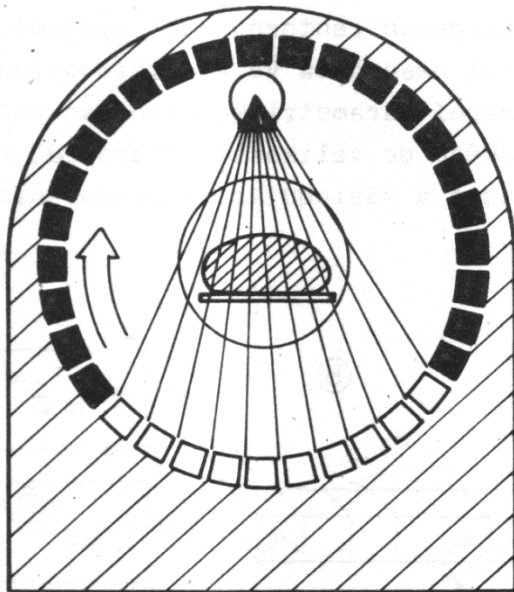


Detekce a zpracování signálu v CT 4. generace

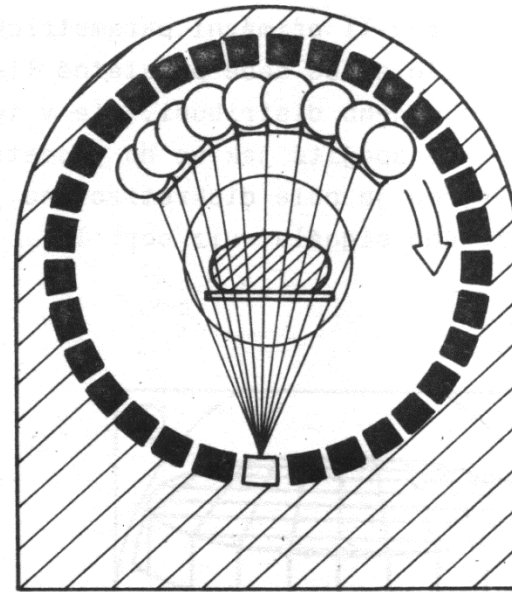
CT 4. generace

- Umožňuje inverzi paprsků

Signál z řady detektorů

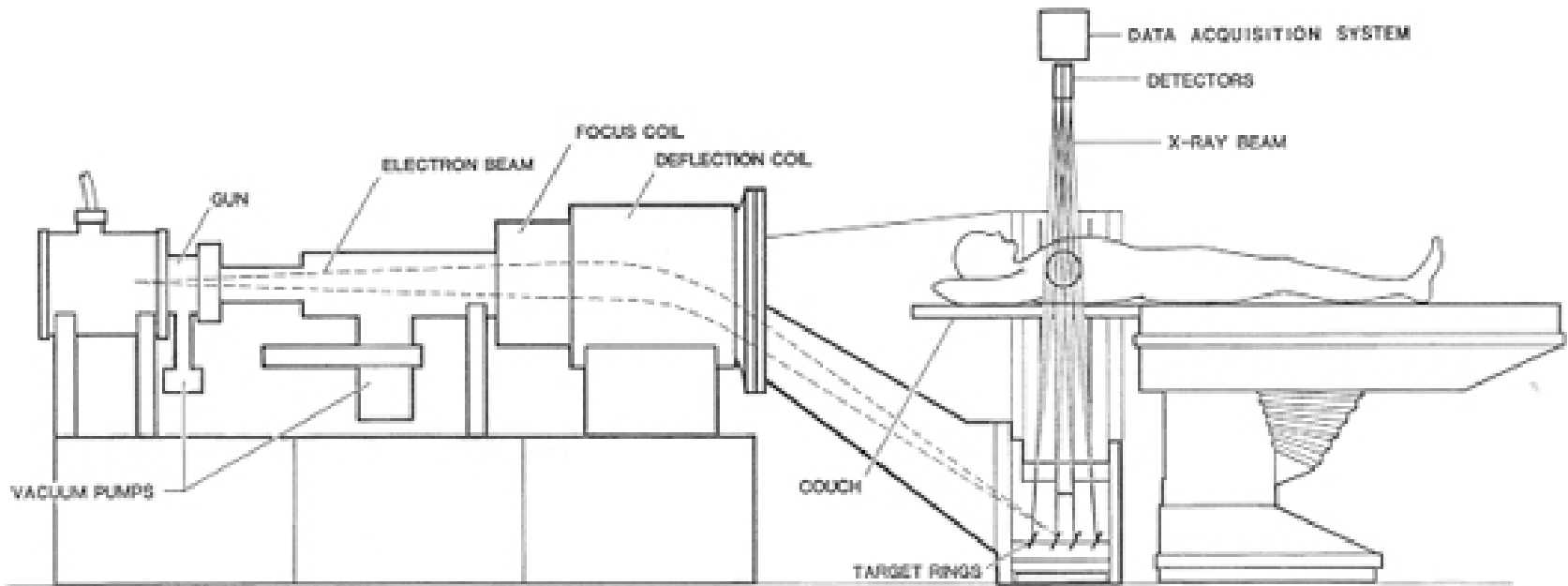


Signál z jednoho detektoru

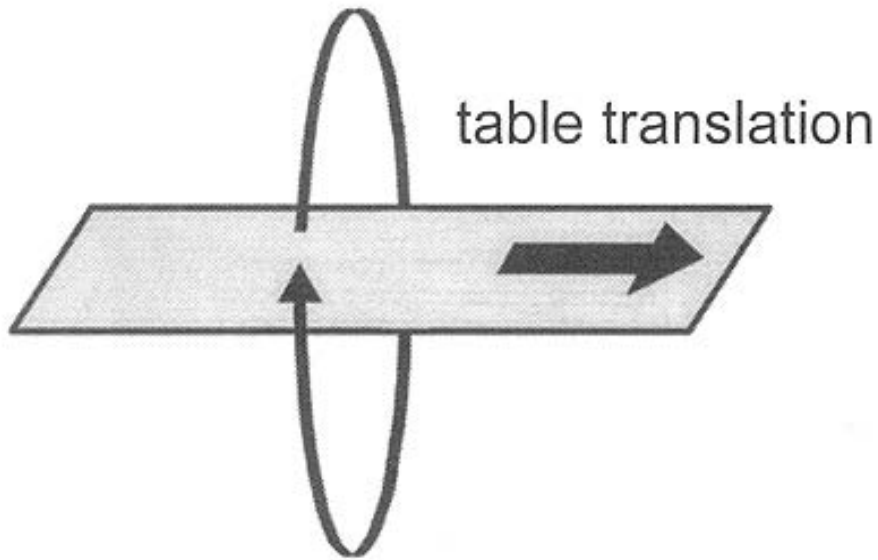


Ultrarychlé CT 5. generace

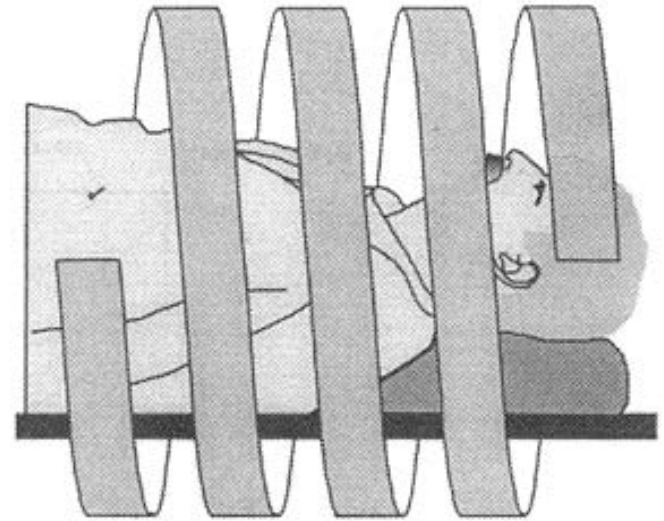
Ultrarychlý CT systém - CVCT



Princip spirálního CT



x-ray tube rotation

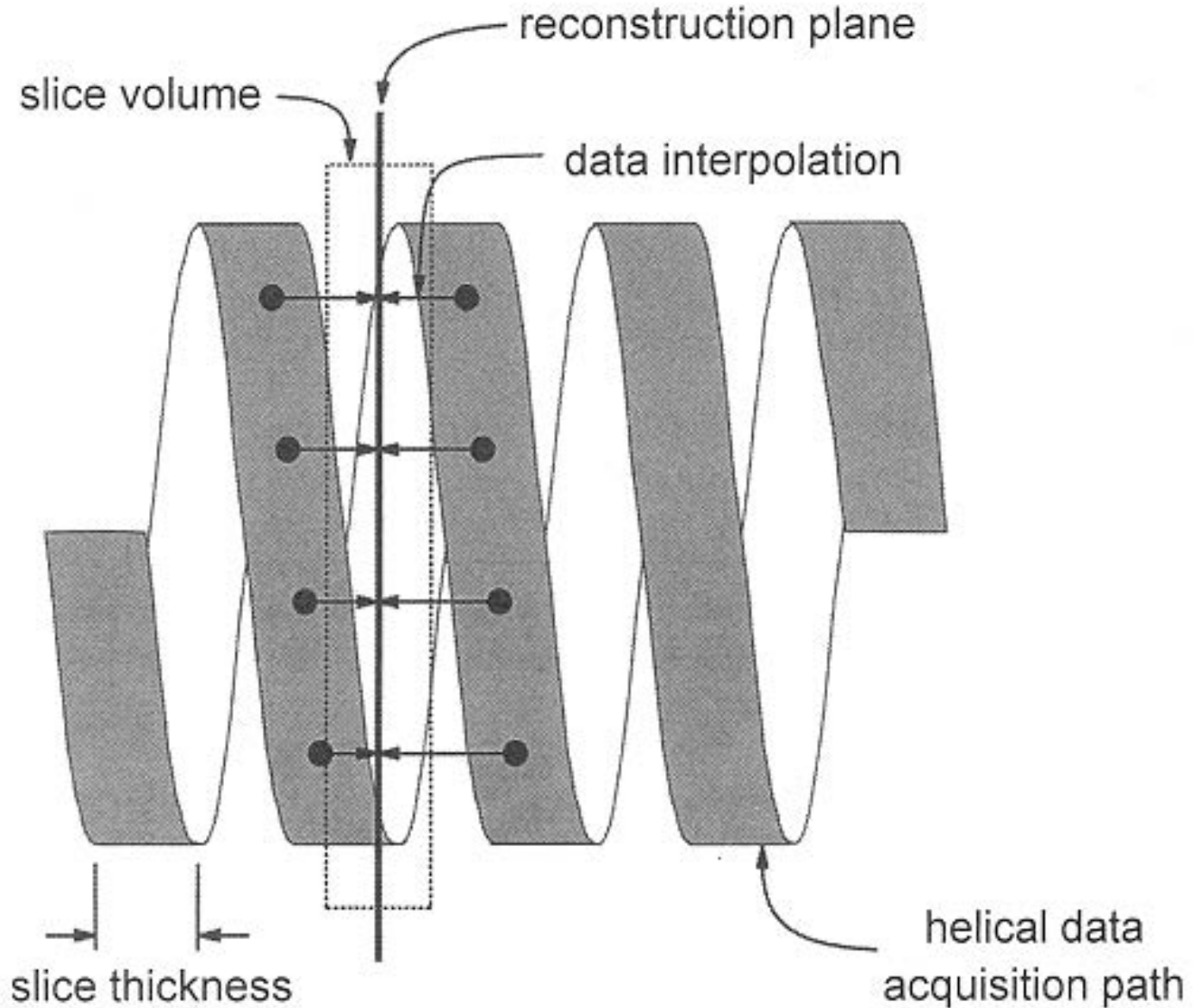


helical x-ray tube
path around patient

Spirální CT (6. generace)

- Při spirálním snímání snímá skener signál při pohybu stolu.
- Protože je pohyb stolu spojitý může být celkový skenovací čas mnohem kratší
- Umožňuje použít menšího množství kontrastní látky a vyšší počet pacientů za stejný čas.
- **V některých případech může být sken naměřený během zadržetí dechu (snížení artefaktu od pohybu hrudníku).**

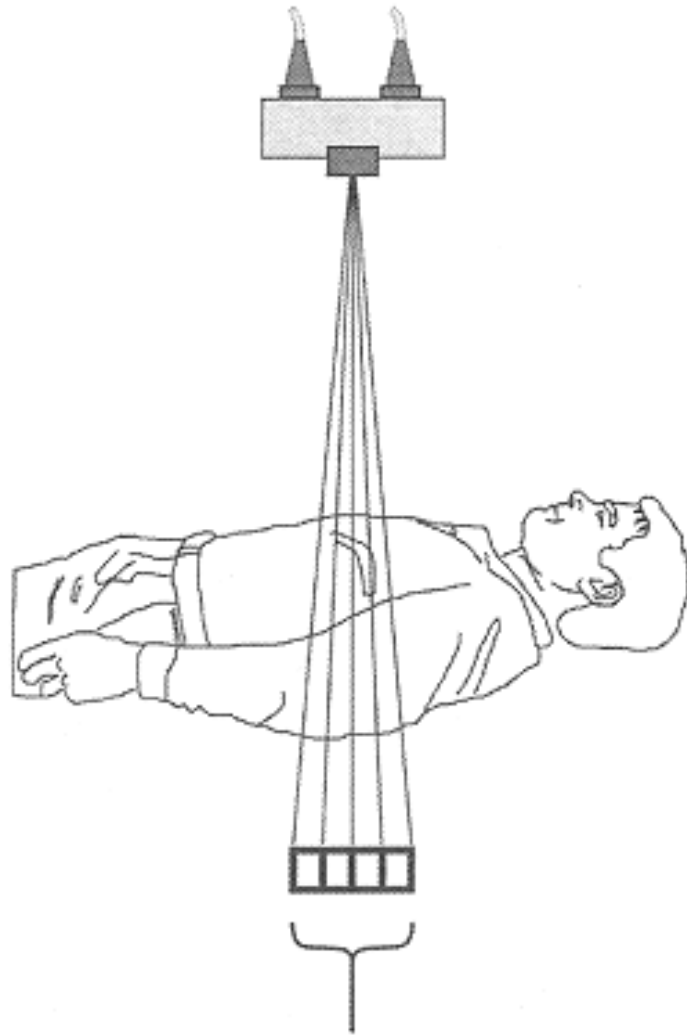
Interpolace



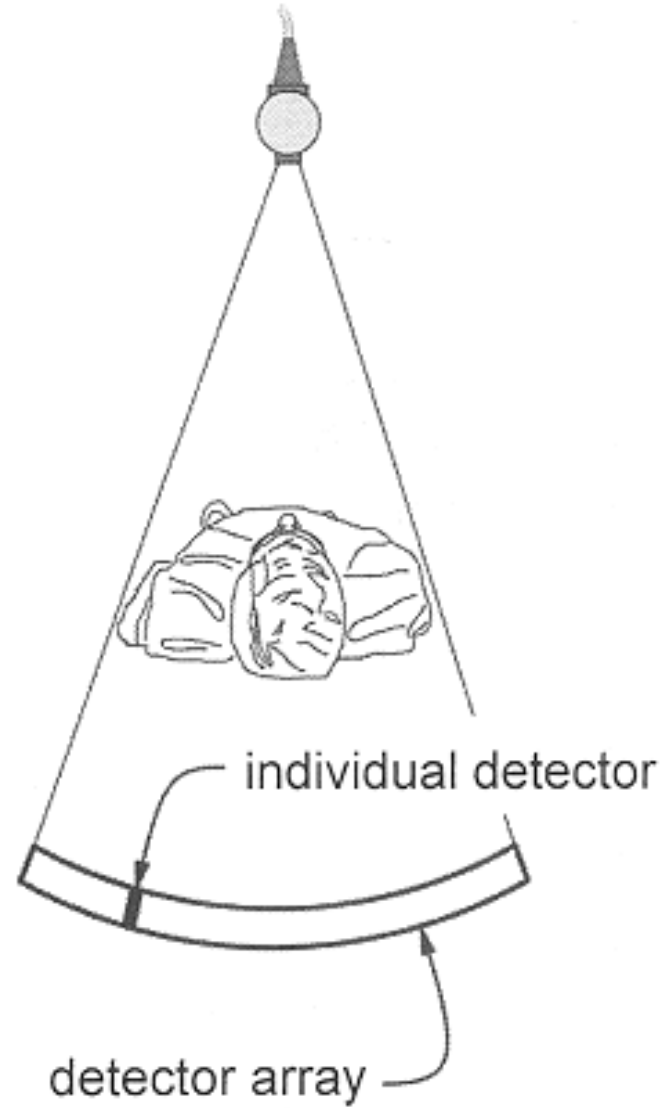
Vícenásobné detektorové pole (7. generace)

- Při použití víceřezového CT (více řad detektorů) je vymezen primární clonou širší svazek rentgenovských fotonů a více fotonů produkovaných rentgenkou je použito při snímání obrazových dat.
 - Vymezení vějíře fotonů primární clonou u jednořezového CT zvyšuje šířku řezu a zmenšuje prostorové rozlišení ve směru pohybu stolu.
 - U víceřezového CT je šířka řezu určena velikostí detektoru, nikoliv šířkou rentgenovského svazku (vymezen primární clonou).

4-řezové CT



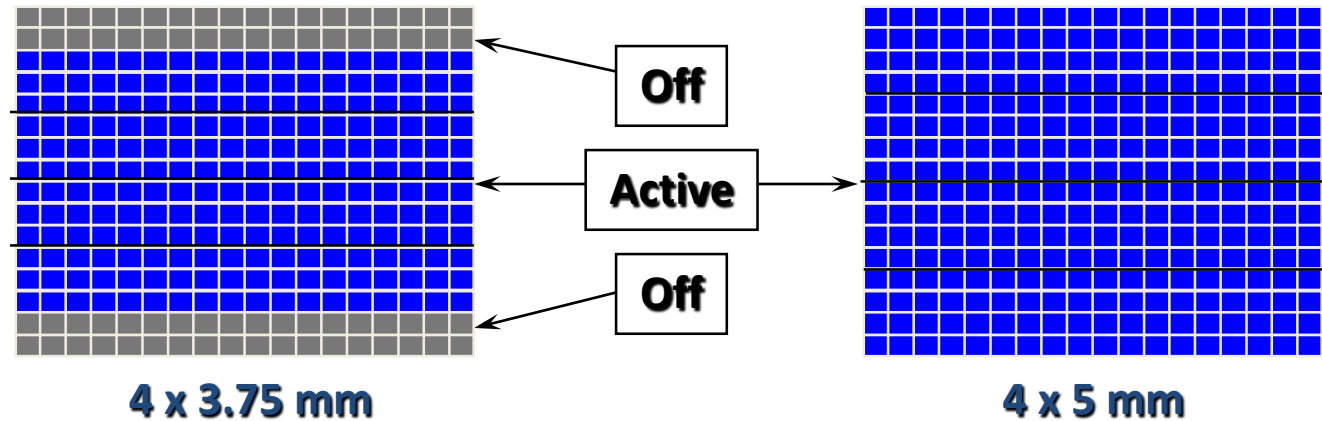
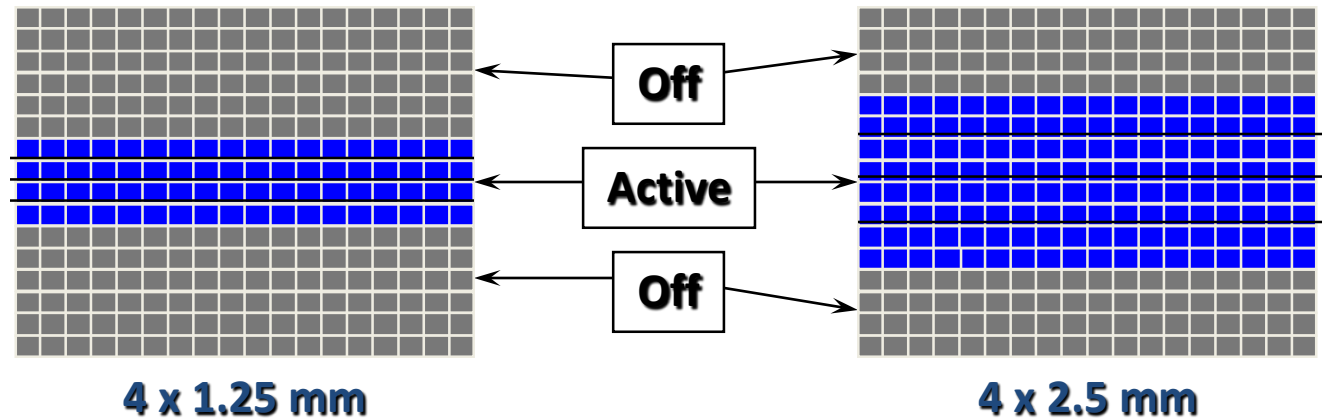
4 detector arrays



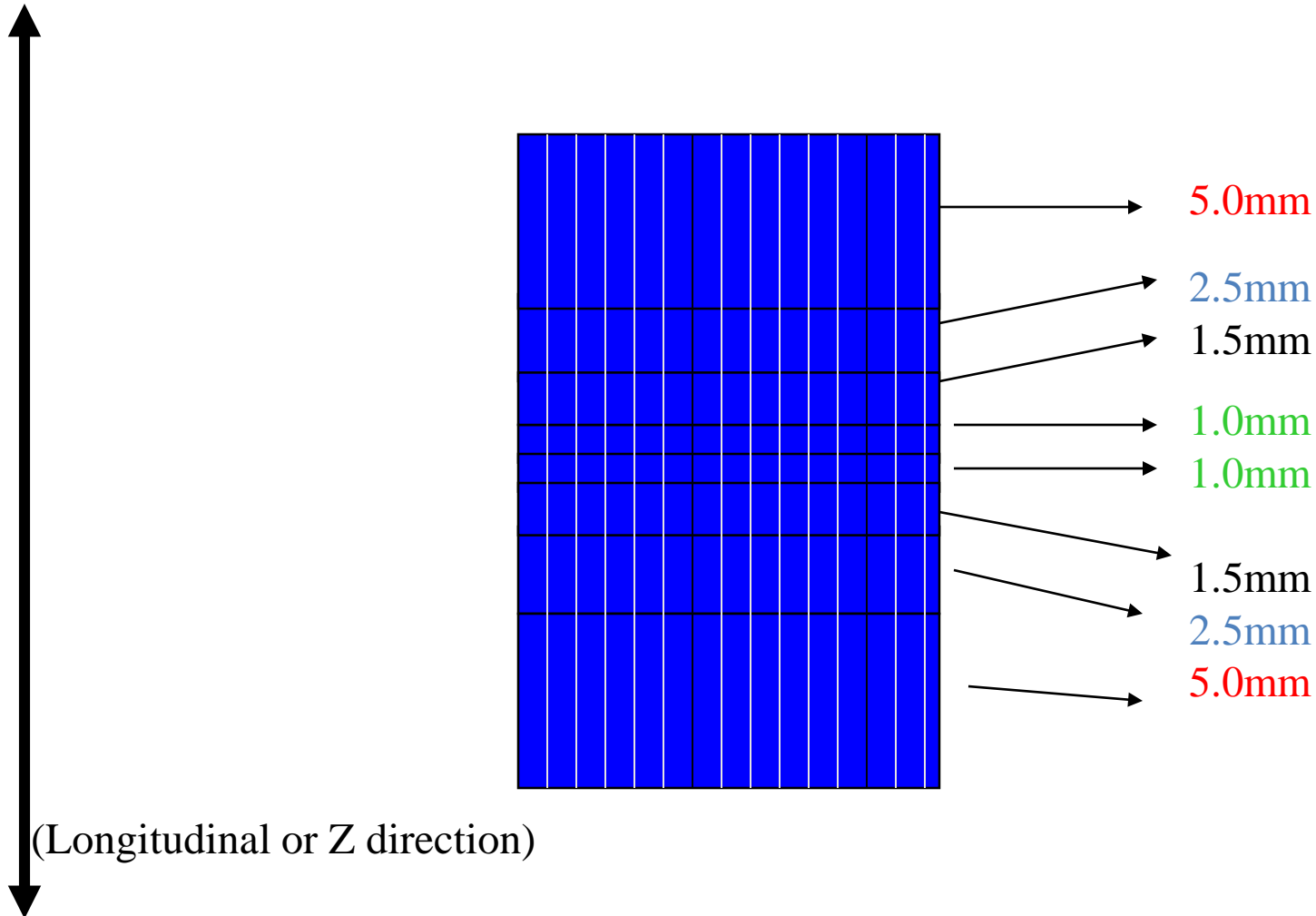
detector array

Snímaní signálu z detektorů

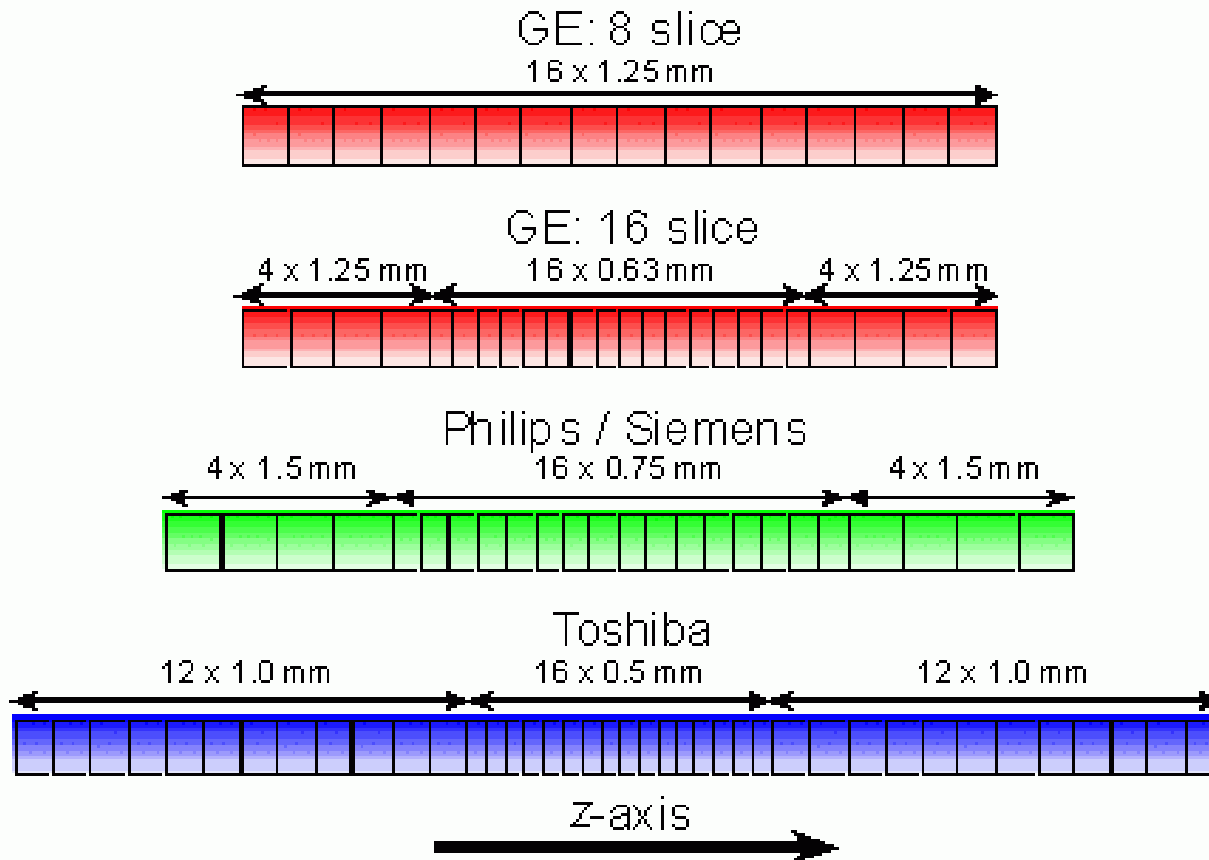
Příklad pro 4 přenosové kanály:



Siemens asymetrický detektor



Ukázka geometrie detektorů



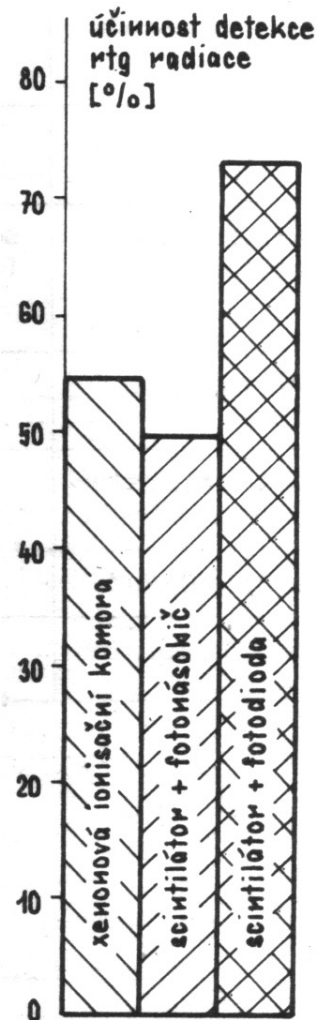
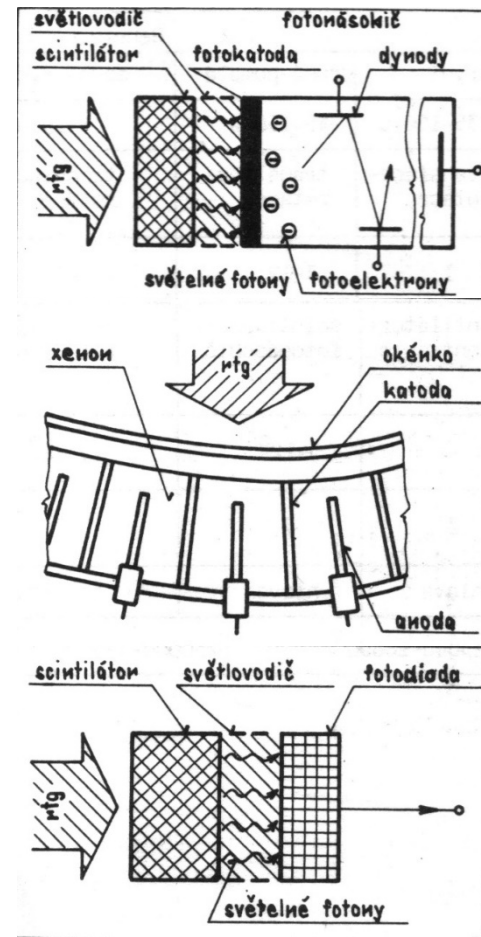
Princip detektorů

Detektor

Scintilační krystal
+ fotonásobič

Ionizační komory (Xenon)

Scintilační krystal
+ fotodioda (fototranzistor)



CT číslo – Haunsfieldovo číslo (HU)

Quantitative evaluation of tissue absorbance.

$$CT = K \cdot \frac{\mu_{\text{tkáň}} - \mu_{\text{voda}}}{\mu_{\text{voda}}} \quad K = 1000$$
$$\mu_{\text{voda}} = 0,19 \text{ cm}^{-1}$$

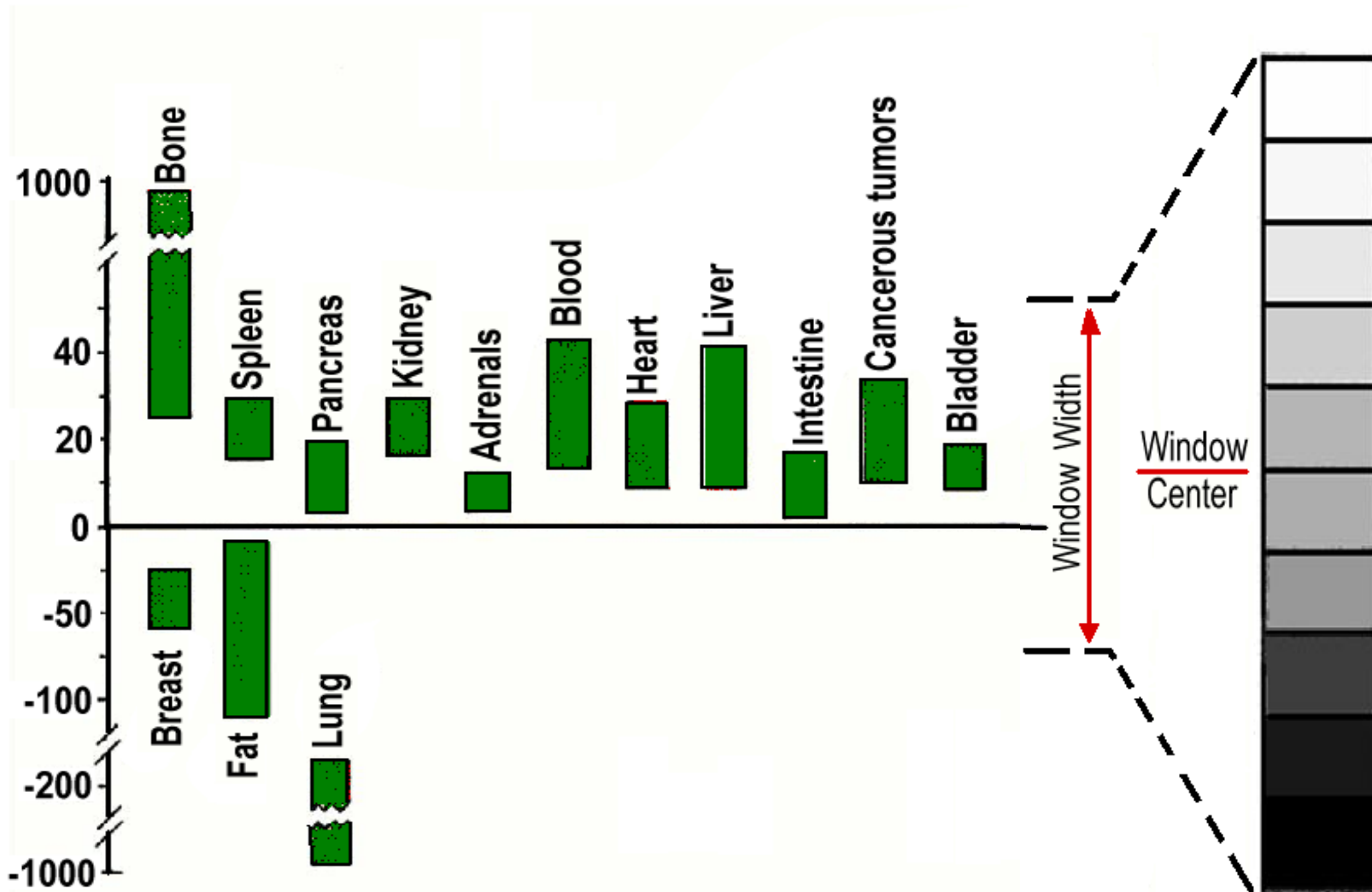
Pro monochromatické záření s energií 73 keV.

$$CT = 5263 \mu_{\text{tkáň}} - 1000$$

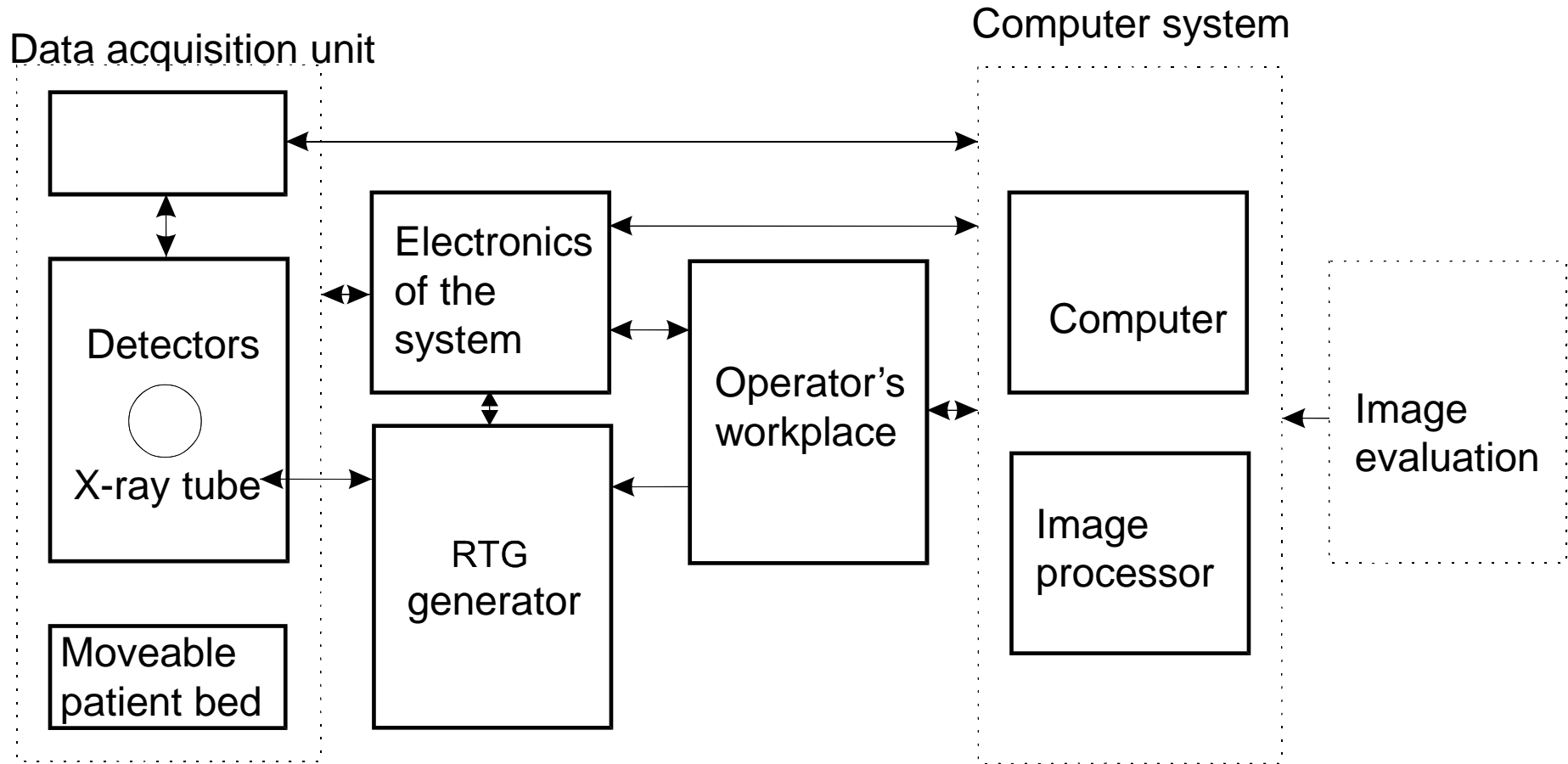
Stupnice CT čísel = stupnice hustoty

rozsah -1000 až +1000, pro vzduch -1000, pro vodu 0

CT číslo – Haunsfieldovo číslo (HU) - zobrazení



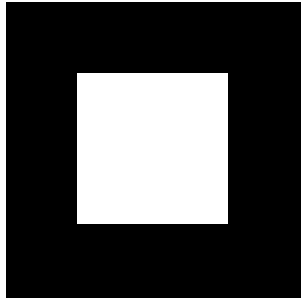
Základní koncept CT přístroje



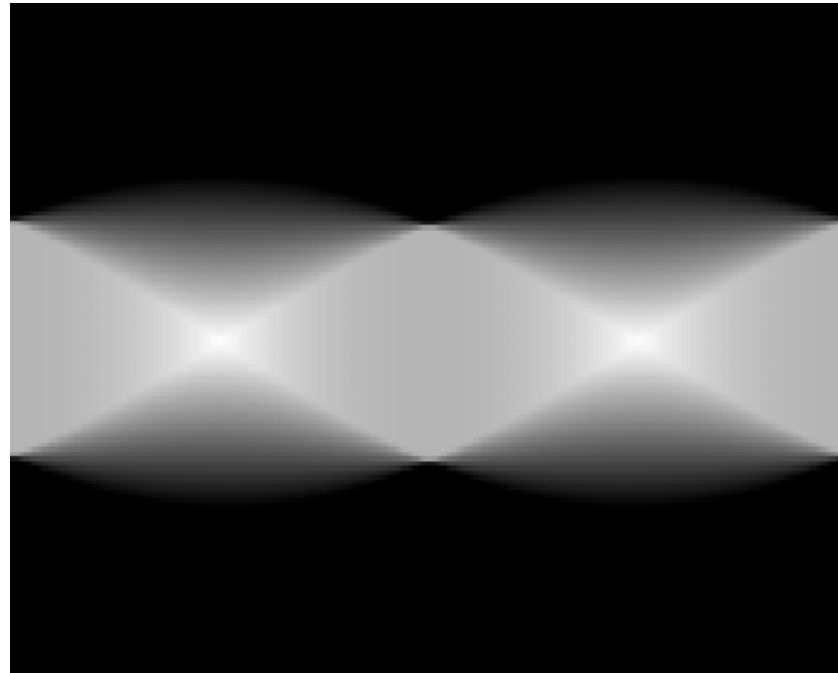
Technické parametry CT přístroje

<https://www.siemens-healthineers.com/computed-tomography/dual-source-ct/somatom-force>

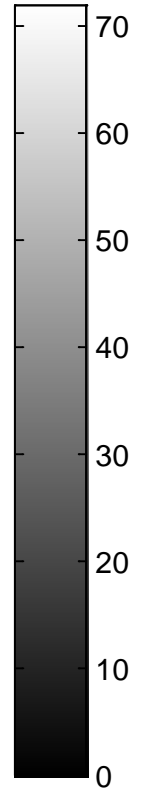
Radonova transformace



$f(x)$



θ (degrees)



Použité zdroje

- Ullmann V.: Jaderná fyzika, radiační fyzika, radioisotopy, 2023 [online]. V. Ullman. [cit. 29. 9. 2019]. Dostupné z: <https://astronuklfyzika.cz/strana2.htm/>
- Computed Tomography - Siemens Healthineers, 2023 [online]. [cit. 29. 9. 2019]. Dostupné z: <https://www.siemens-healthineers.com/computed-tomography/>
- BUSHBERG, Jerrold T. The essential physics of medical imaging [online]. Third edition. Philadelphia: Wolters Kluwer Health/Lippincott Williams & Wilkins, [2012], ©2012 [cit. 2019-09-29]. Dostupné z: <<https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=2031899>>.
- Steven W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing [online]. Second edition. San Diego: California Technical Publishing, [1999], [cit. 2019-09-29]. Dostupné z: <<http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>>.
- DRASTICH, Aleš. Zobrazovací systémy v lékařství. 1. vyd. Brno: VUT, 1983. 330 s.

Toto dílo podléhá této licenci: Creative Commons 4.0 BY-SA



Computed Tomography image reconstruction



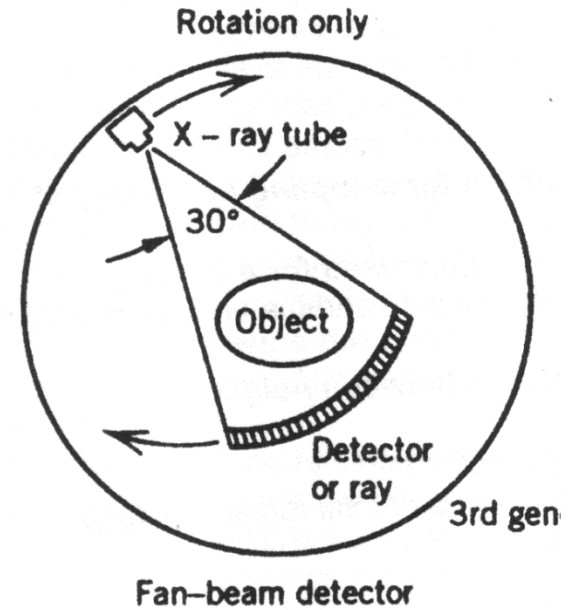
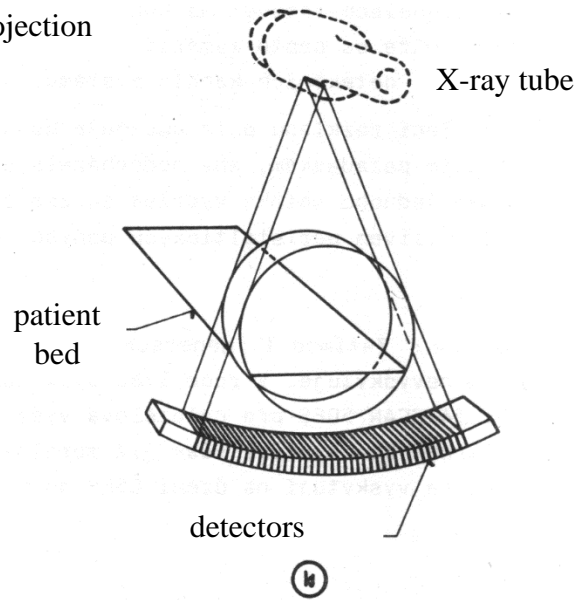
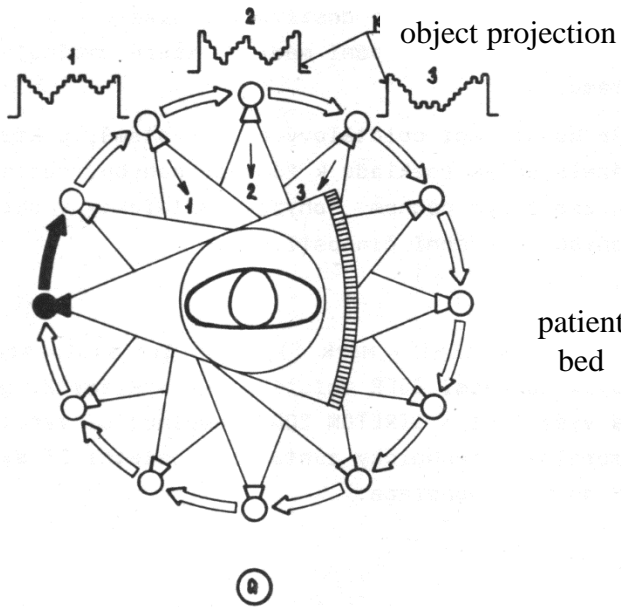
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Zdroj: <https://predmety.fbmi.cvut.cz/cs/doktorske-bme>

CT of 3. generation



Základní principy rekonstrukce obrazu

$o(\xi, \eta)$ denzitní funkce =
předmětová funkce

μ lin. součinitel
zeslabení

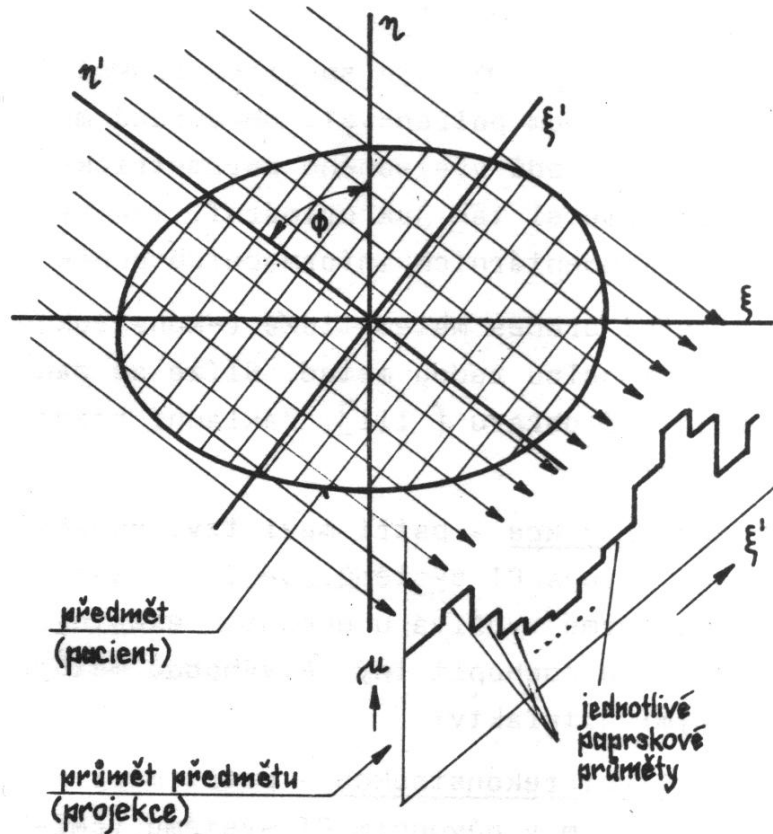
(ξ, η) původní souř.

Φ snímací úhel

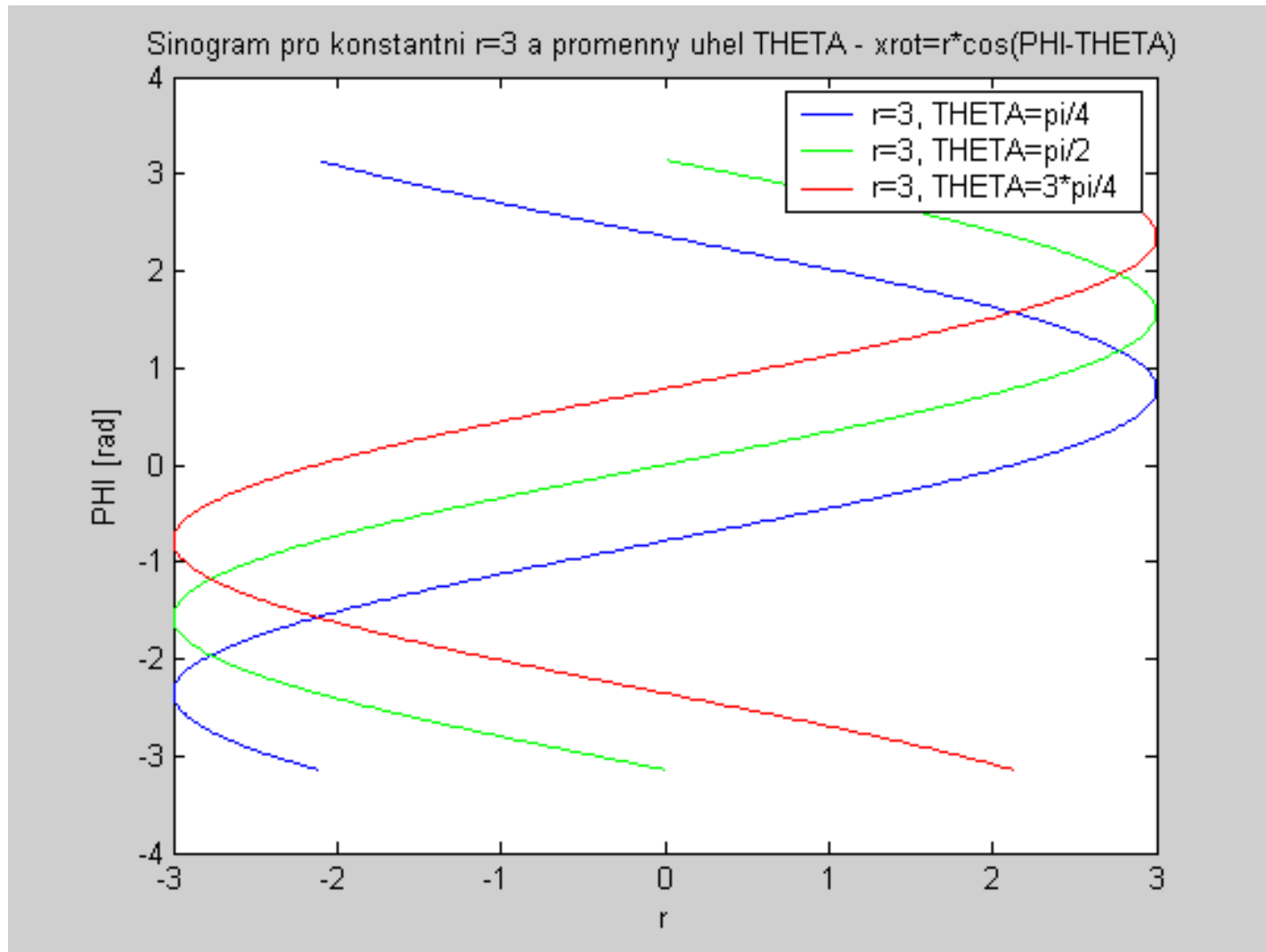
ξ' rotovaná souř.

η' rotovaná souř.

$p(\xi', \Phi)$ paprskový součet či průmět

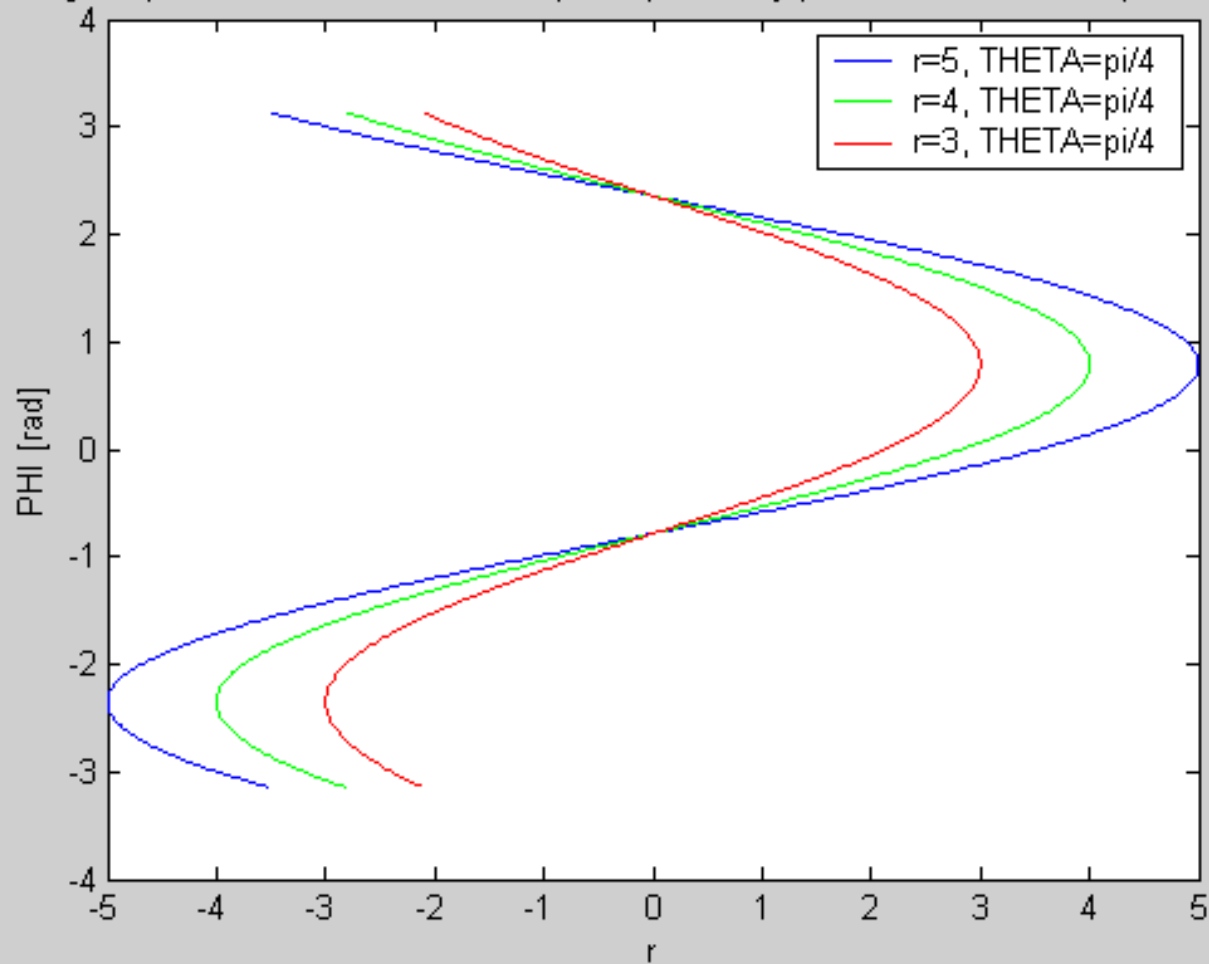


Radon transformation

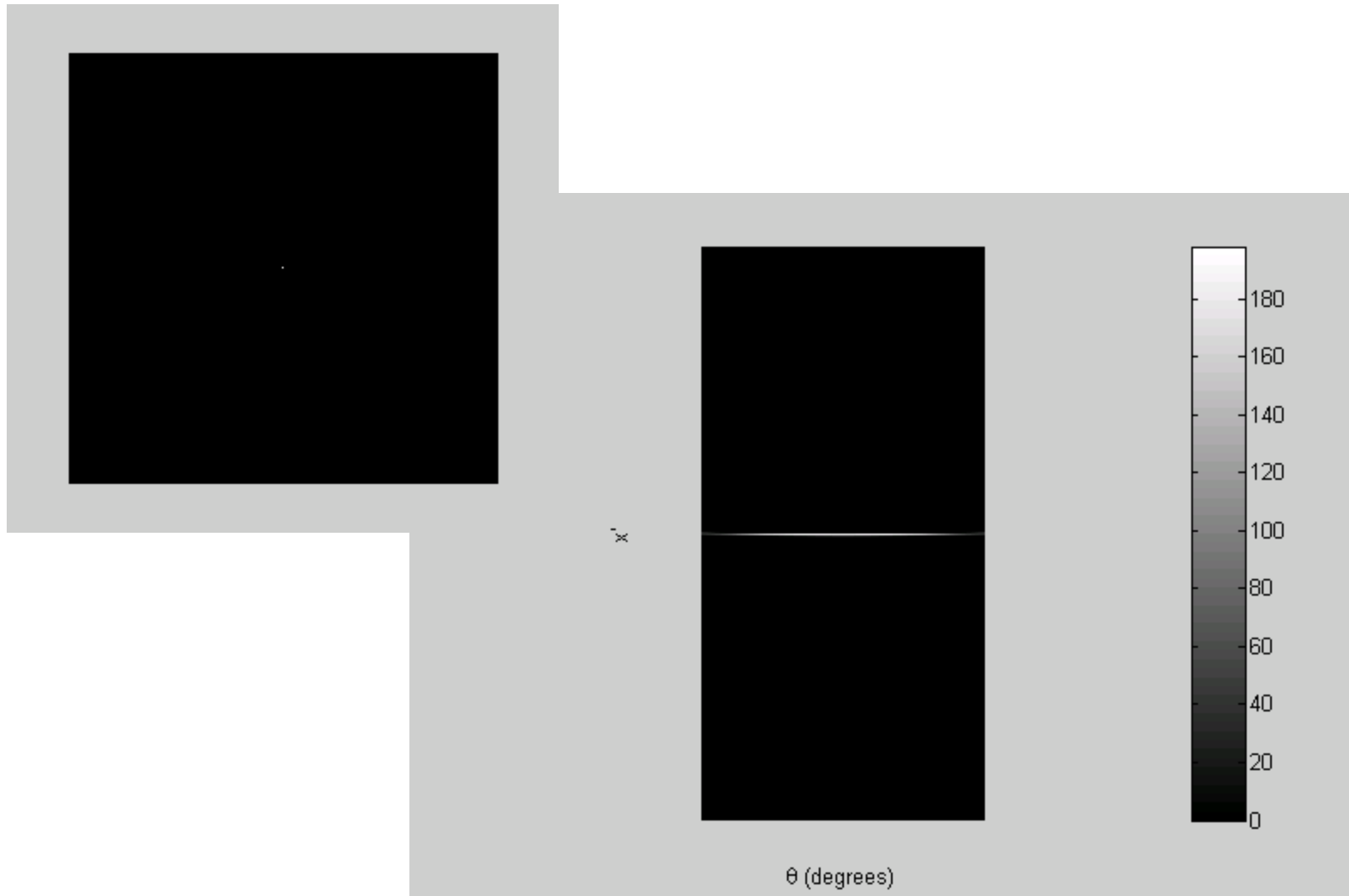


Radon transformation

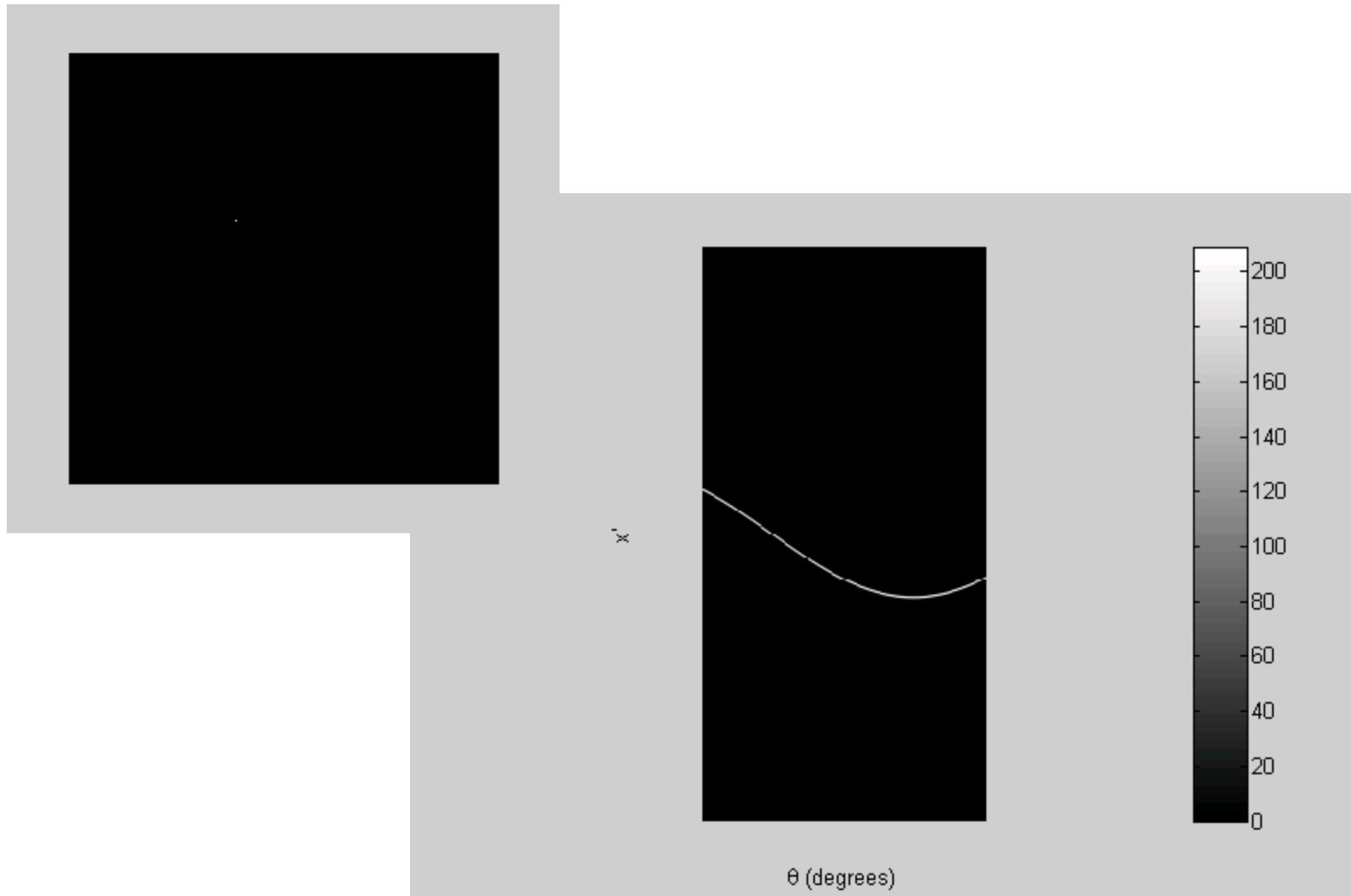
Sinogram pro konstantni uhel $\text{THETA}=\pi/4$ a promenny polomer r - $x_{\text{rot}}=r\cos(\text{PHI}-\text{THETA})$



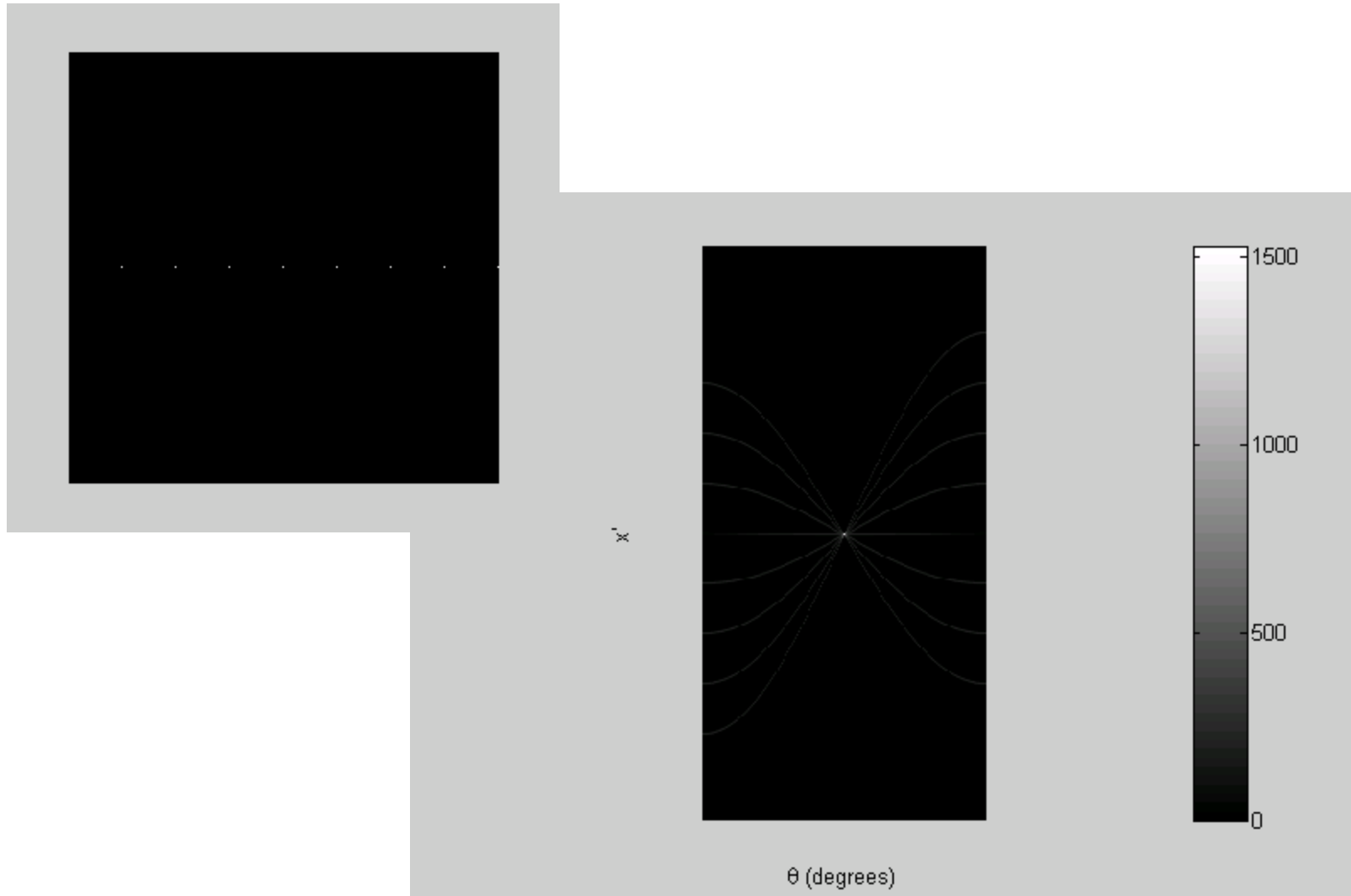
Radon transformation



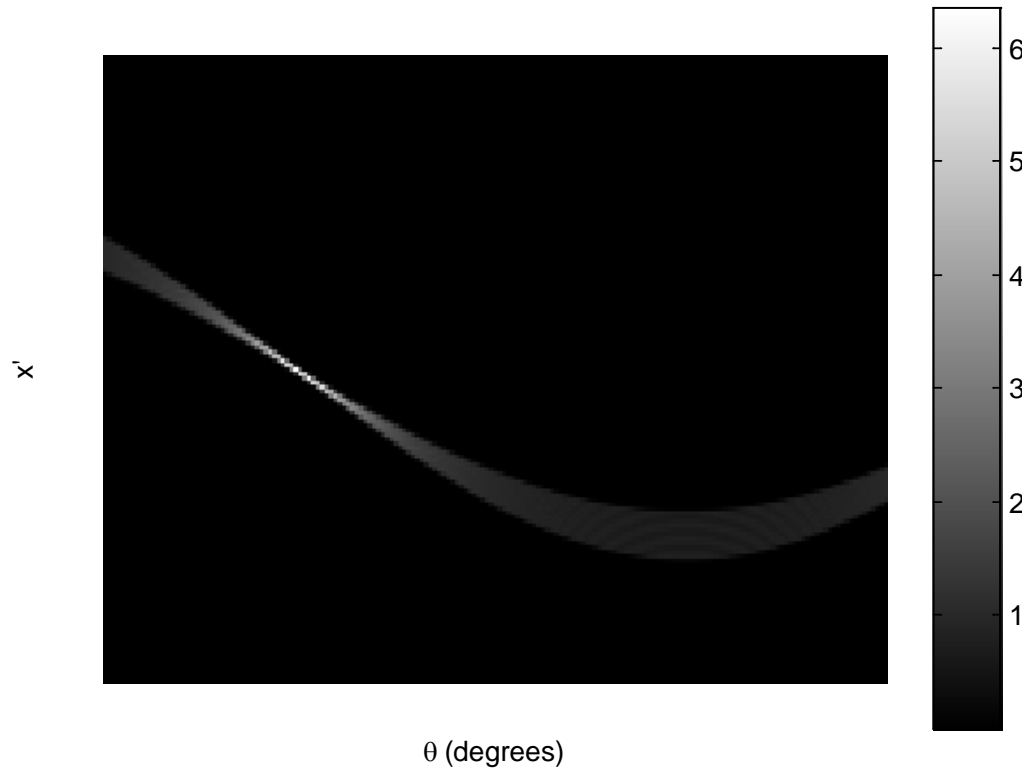
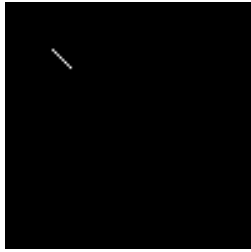
Radon transformation



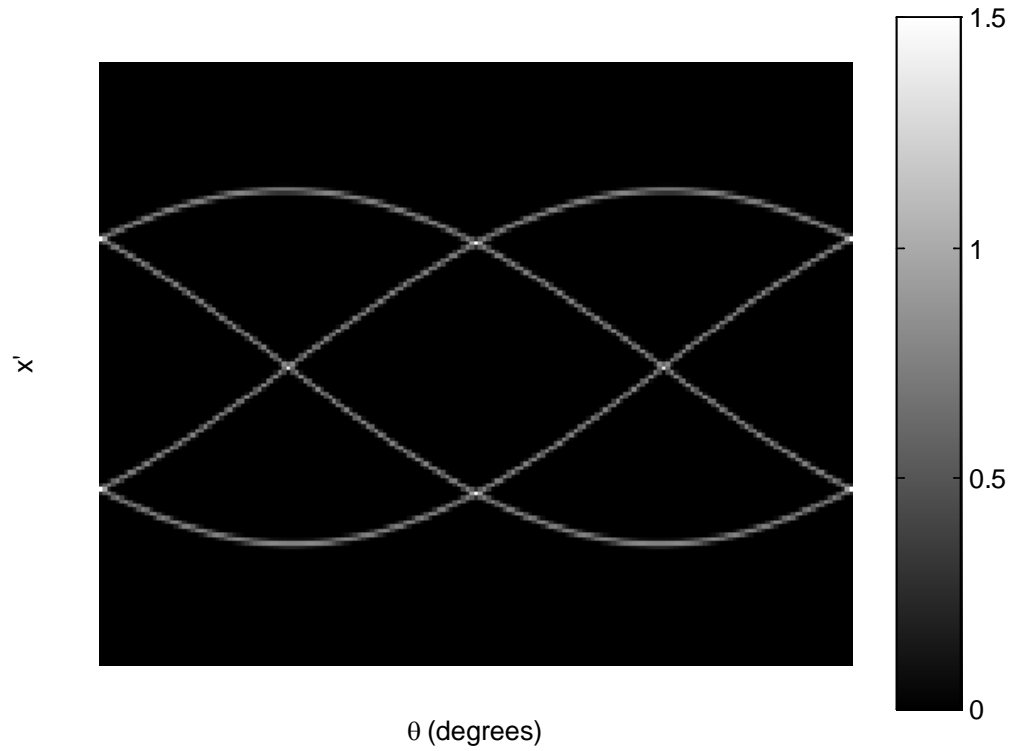
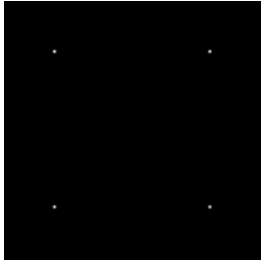
Radon transformation



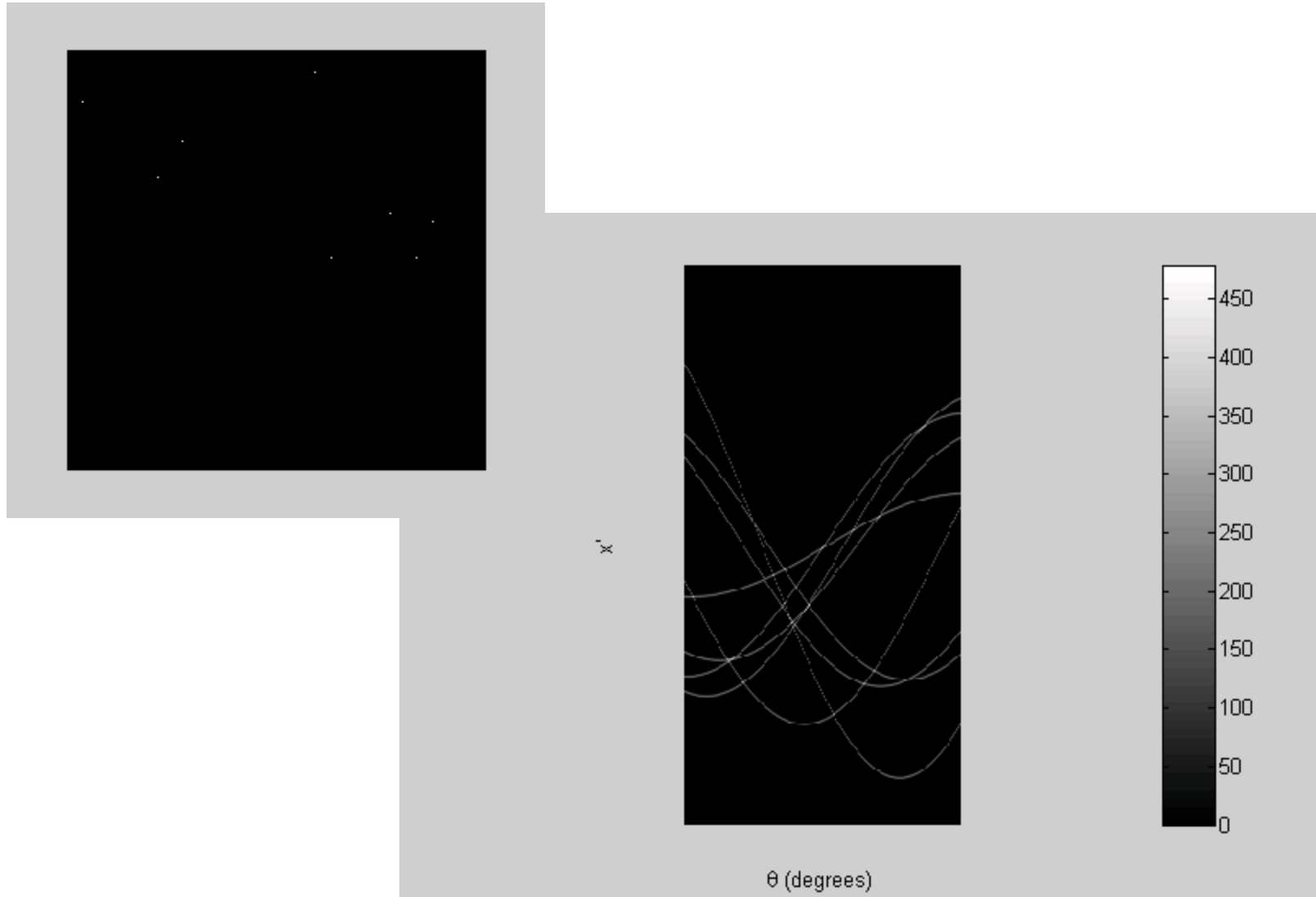
Radon transformation



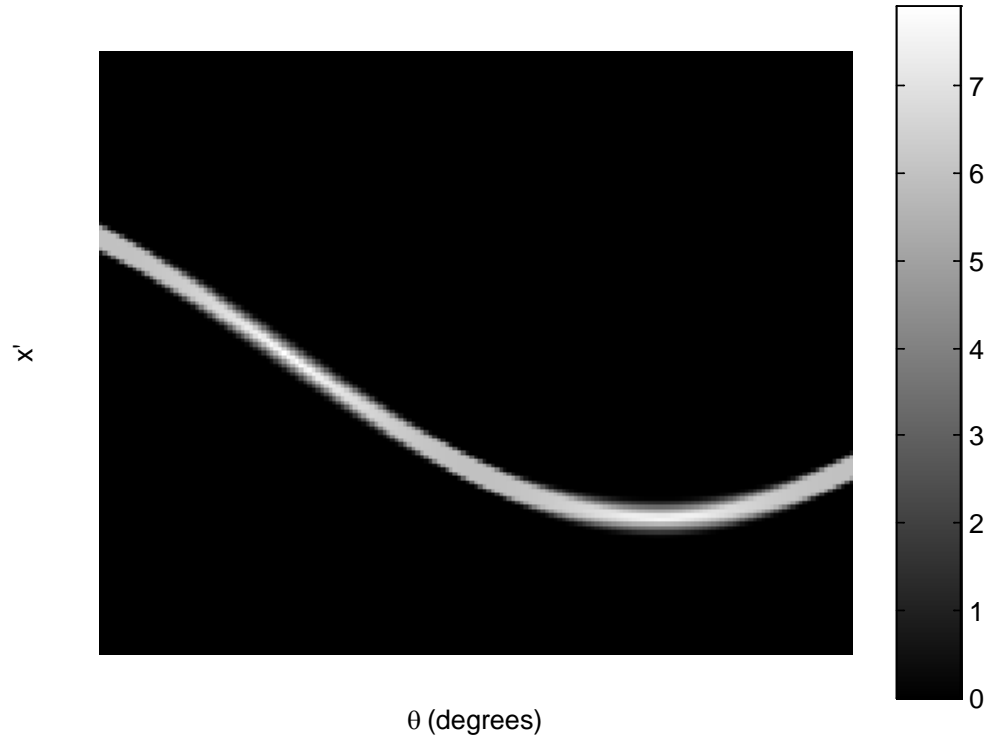
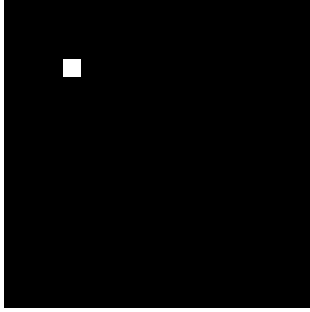
Radon transformation



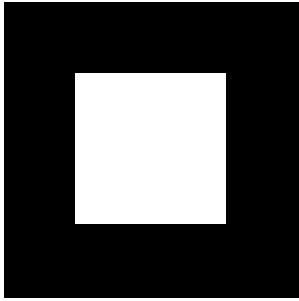
Radon transformation



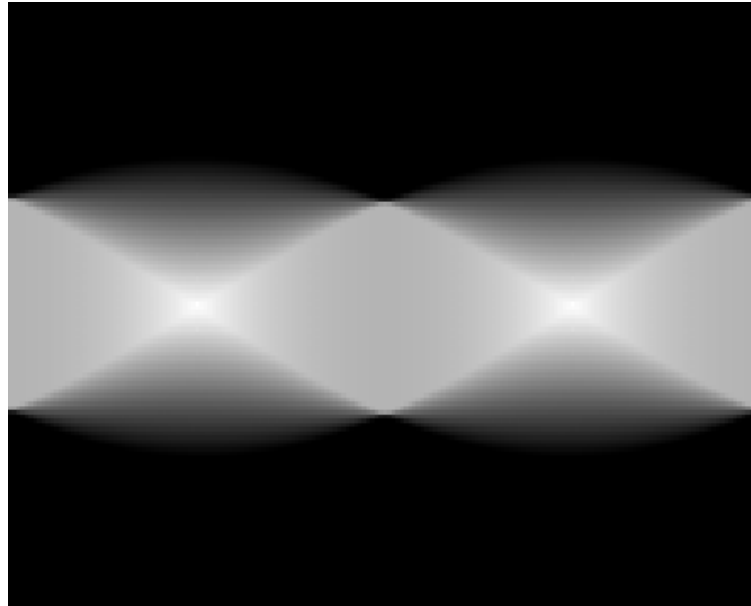
Radon transformation



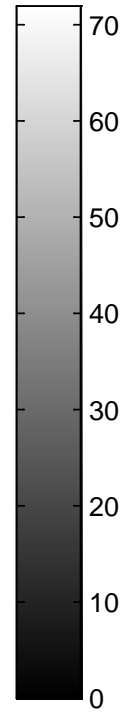
Radon transformation



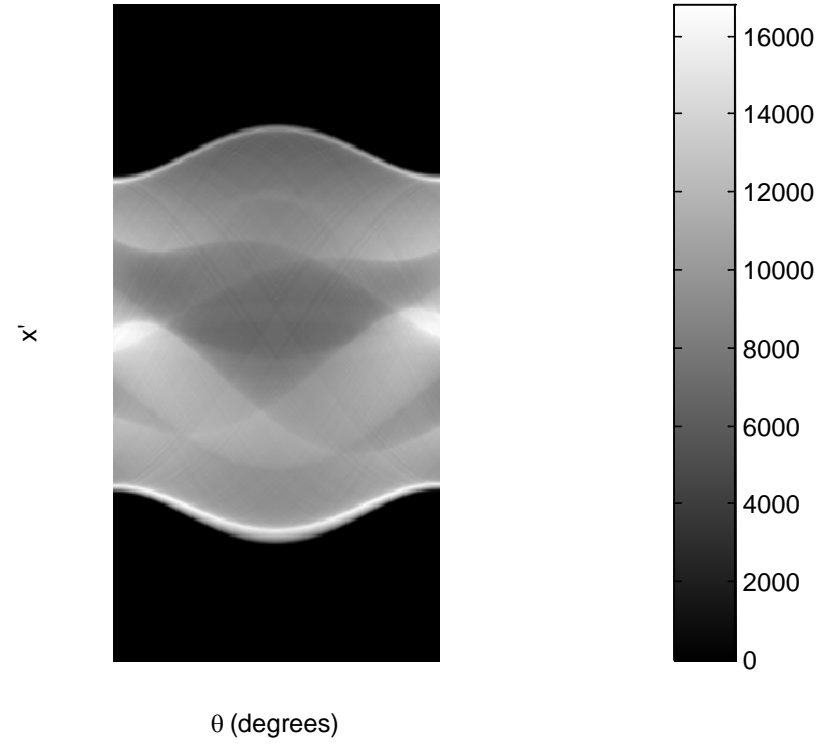
x



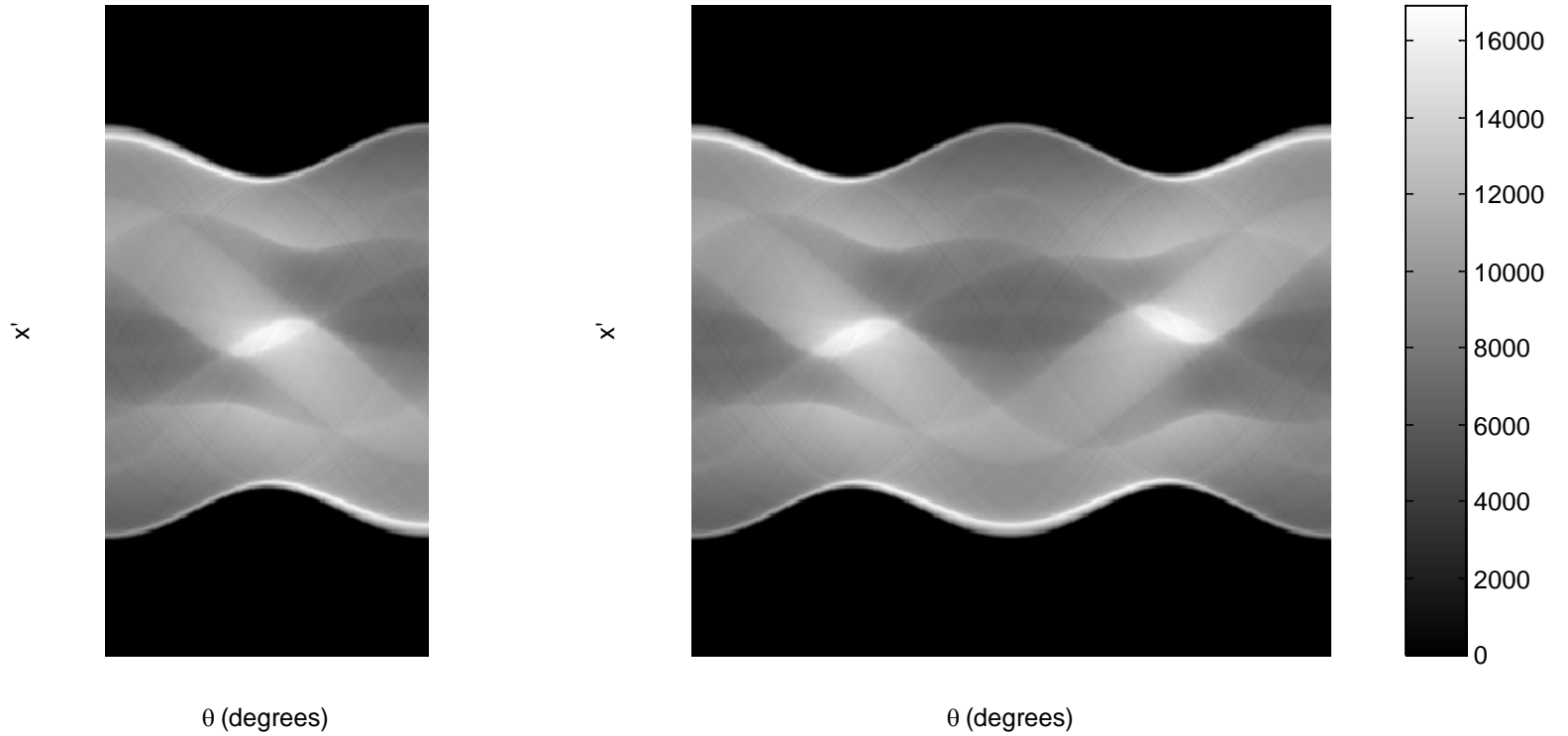
θ (degrees)



Radon transformation



Radon transformation



Základní principy rekonstrukce obrazu

$o(\xi, \eta)$ denzitní funkce =
předmětová funkce

μ lin. součinitel
zeslabení

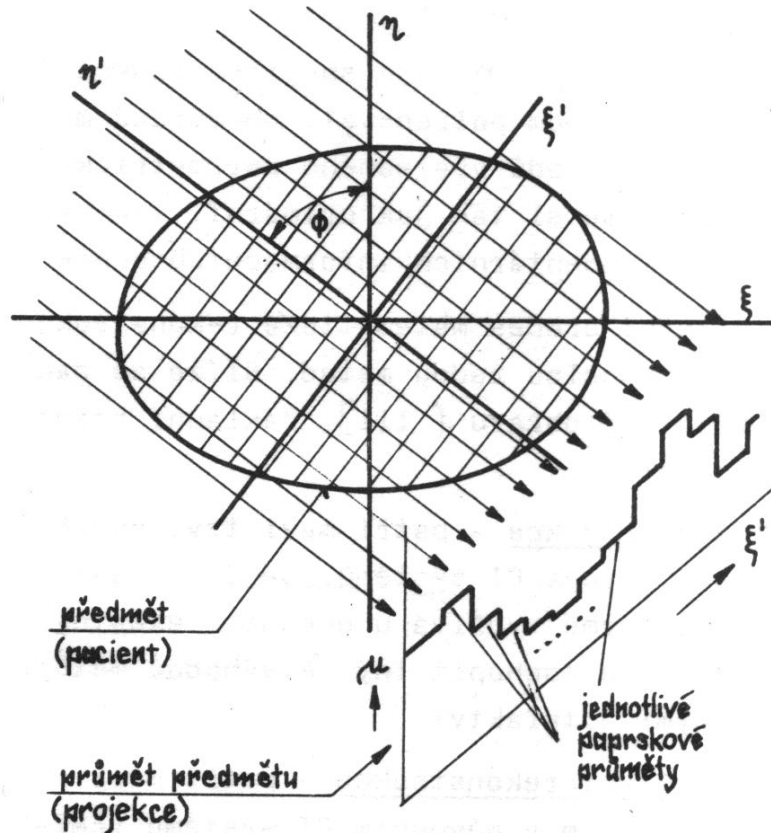
(ξ, η) původní souř.

Φ snímací úhel

ξ' rotovaná souř.

η' rotovaná souř.

$p(\xi', \Phi)$ paprskový součet či průmět



Basic Principles of Image Reconstruction

$$p(\xi', \Phi) = \int o(\xi, \eta) d\eta' \quad I = I_0 \exp\left[-\int \mu(\xi, \eta) d\eta\right]$$

$$o(\xi, \eta) \approx \mu(\xi, \eta)$$

$$p(\xi', \Phi) = \ln \frac{I_0}{I}$$

$$\xi' = \xi \cdot \cos \Phi + \eta \cdot \sin \Phi \quad \xi = \xi' \cdot \cos \Phi - \eta \cdot \sin \Phi$$

$$\eta' = -\xi \cdot \sin \Phi + \eta \cdot \cos \Phi \quad \eta = \xi' \cdot \sin \Phi + \eta \cdot \cos \Phi$$

Matematická rekonstrukce obrazu ze souboru jeho průmětů

- **zpětná projekce**
 - sumační metoda
 - jednoduchá metoda
 - podstatné artefakty
- **iterativní rekonstrukce**
 - algebraická metoda
 - použita u EMI-Scanneru
 - používá se u PET, SPECT
- **analytická rekonstrukce**
 - matematické řešení
 - **filtrovaná zpětná projekce**
 - **filtrovaná 2D FT**

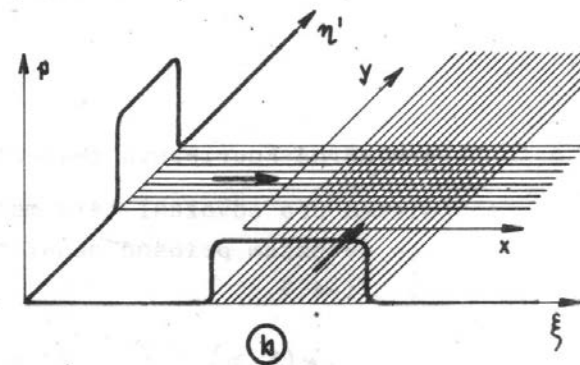
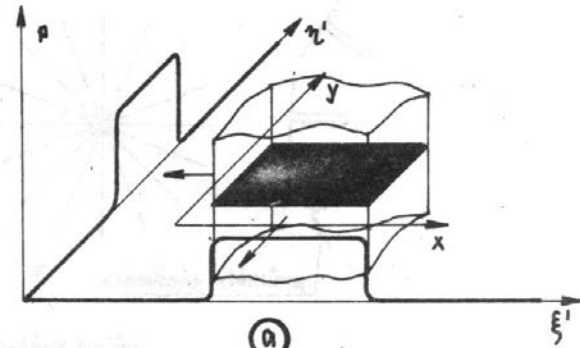
Přímá zpětná projekce

$$i(x, y) = \sum_{j=1}^m p(\xi', \Phi_j) \Delta\Phi$$

Φ_j j-tý projekční úhel

$\Delta\Phi$ úhlový přírůstek mezi projekcemi

m počet projekcí



$$i(x, y) = \sum_{j=1}^m p\left(\left(\xi \cdot \cos \Phi_j + \eta \cdot \sin \Phi_j\right), \Phi_j\right) \Delta\Phi$$

Snímání projekcí

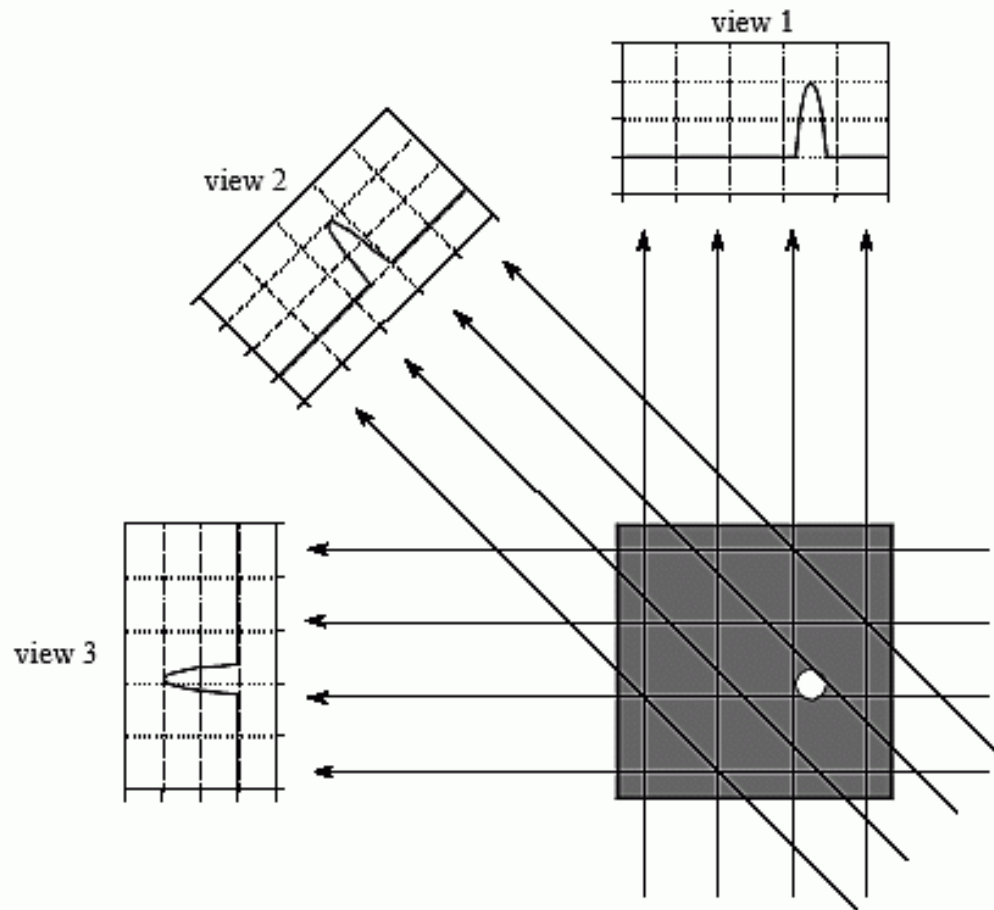


FIGURE 25-15

CT views. Computed tomography acquires a set of views and then reconstructs the corresponding image. Each sample in a view is equal to the sum of the image values along the ray that points to that sample. In this example, the image is a small pillbox surrounded by zeros. While only three views are shown here, a typical CT scan uses hundreds of views at slightly different angles.

Přímá zpětná projekce - hvězdicový artefakt

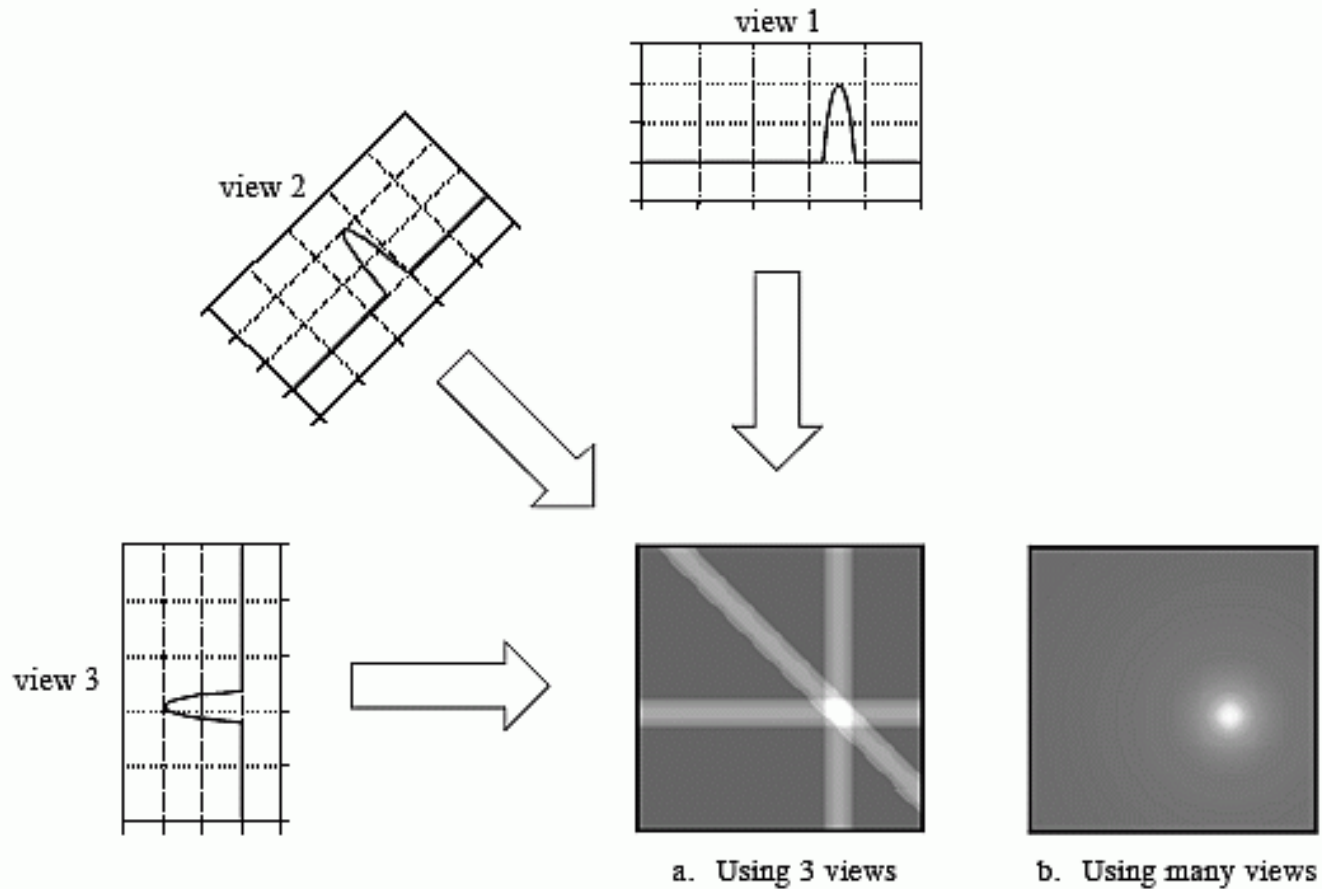


FIGURE 25-16

Backprojection. Backprojection reconstructs an image by taking each view and *smearing* it along the path it was originally acquired. The resulting image is a blurry version of the correct image.

Analytické rekonstrukce

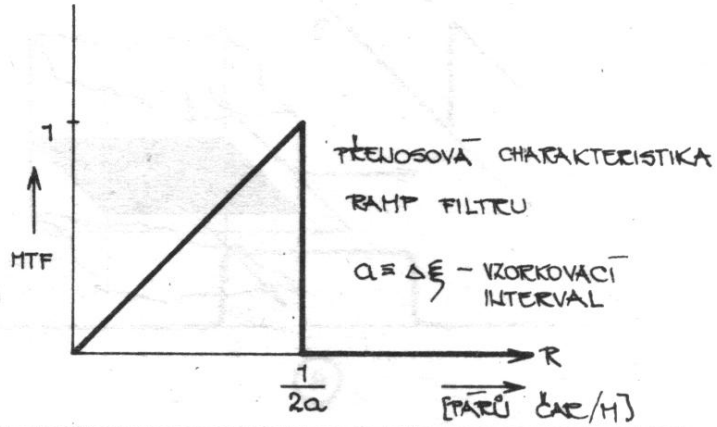
- přímé řešení rovnice $p(\xi', \Phi) = \int o(\xi, \eta) d\eta'$
- diskretizace primárního parametrického pole
 - omezení prostorové rozlišovací schopnosti
- dvě základní metody
 - **Filtrovaná zpětná projekce**
 - **2D Fourierova rekonstrukce**
(the central projection theorem, the Fourier slice theorem – věta o centrálním řezu)

Filtrovaná zpětná projekce

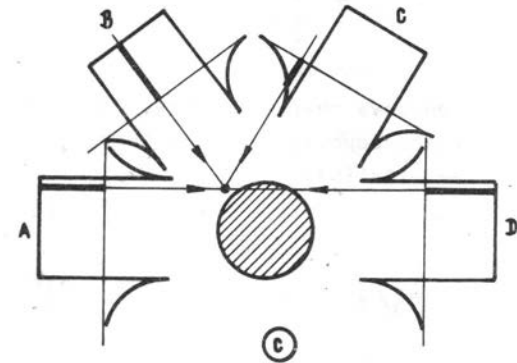
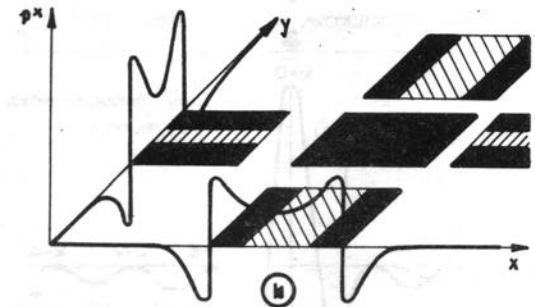
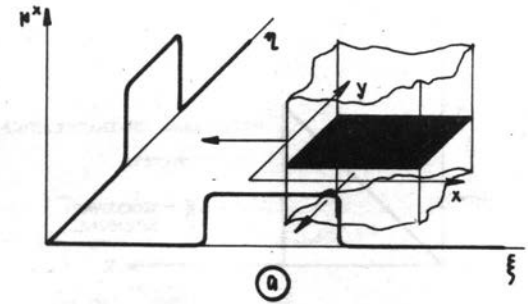
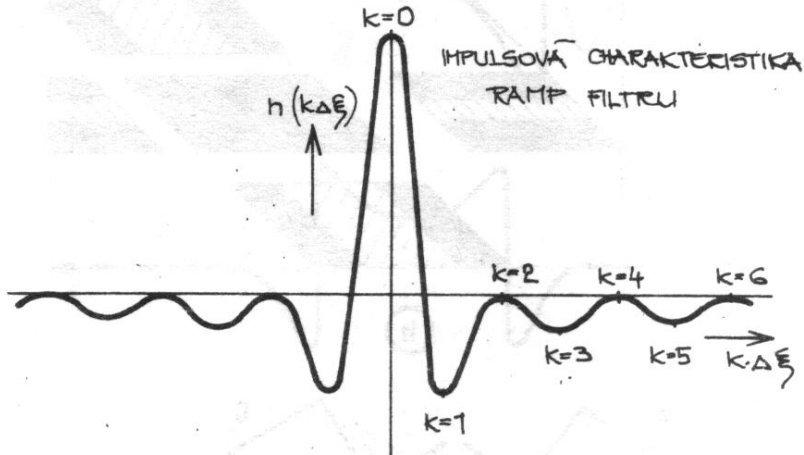
$$p^x(n\Delta\xi) = p(n\Delta\xi) * h(n\Delta\xi)$$

$$p^x(n\Delta\xi) = \sum_{m=-k}^k h(m\Delta\xi) \cdot p(n\Delta\xi - m\Delta\xi)$$

Filtrovaná zpětná projekce



INVERZNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE FT^{-1}



Filtrovaná zpětná projekce

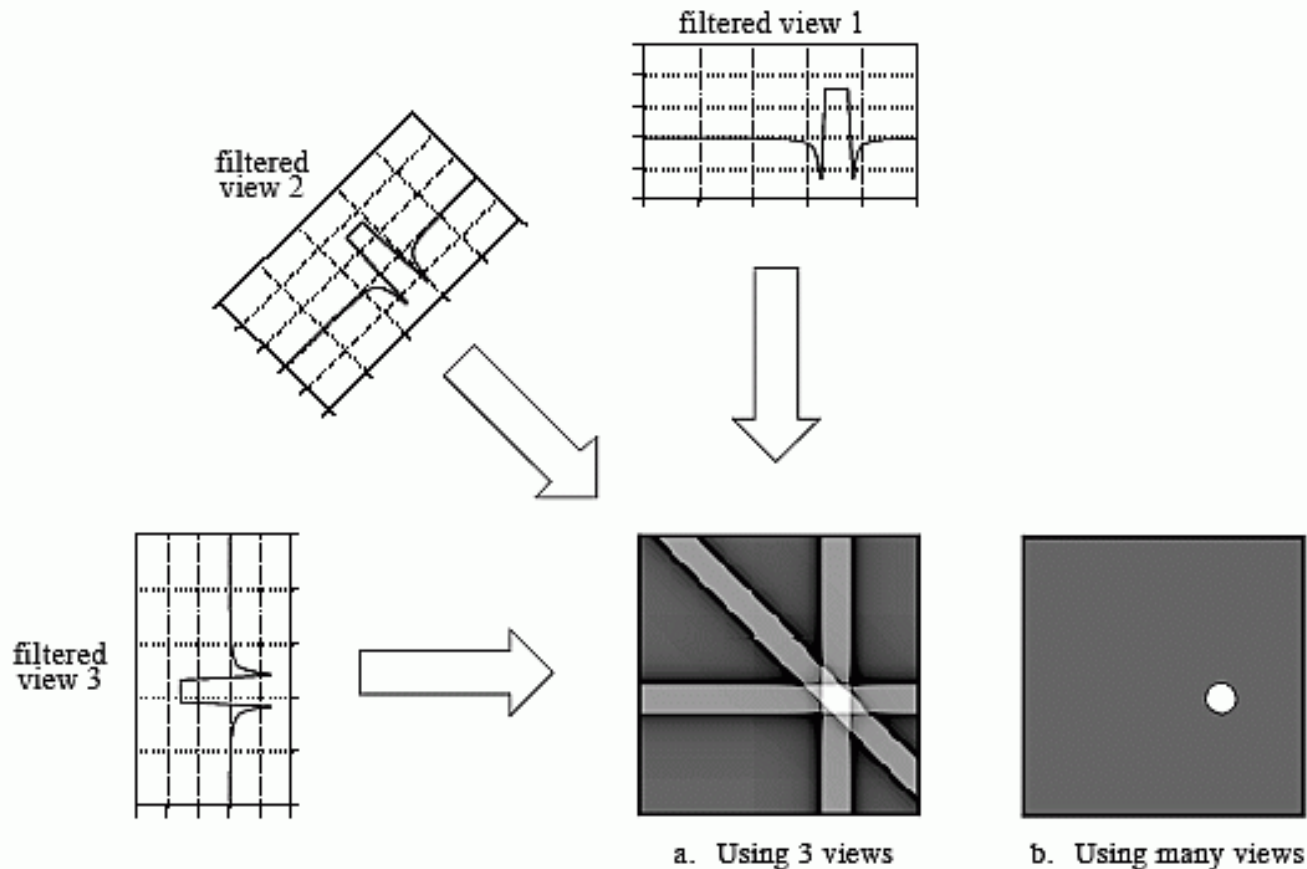


FIGURE 25-17

Filtered backprojection. Filtered backprojection reconstructs an image by filtering each view before backprojection. This removes the blurring seen in simple backprojection, and results in a mathematically exact reconstruction of the image. Filtered backprojection is the most commonly used algorithm for computed tomography systems.

Iterativní rekonstrukce (IR) - úvod

Přednosti IR proti FBP:

- IR umožňují lépe modelovat fyzikální podstatu zobrazování (útlum, rozlišení, šum),
- IR umožňují lépe pracovat s jednotlivými případy naměřených dat (oříznutí projekcí, tomografie s omezeným úhlem),
- některé algoritmy IR poskytují lepší šumové textury (rozdílný typ a stupeň korelace šumu).

Iterativní rekonstrukce – základní myšlenka

- základem je aplikování korekcí na libovolné počáteční hodnoty denzit objemových elementů (voxelů) tak, abychom dosáhli shody s naměřenými daty – projekcemi,
- celý postup provádíme tak dlouho, dokud projekce vypočítané z odhadů původní distribuce zdroje záření nebudou odpovídat naměřené distribuci zdroje záření v rámci požadované přesnosti.

Iterativní rekonstrukce – obecný postup

1. Zvolíme počáteční hodnoty odhadu objemových elementů (voxelů) \hat{f}_i^0 , kde i je index voxelu. Typickým prvním krokem je přiřazení průměrných hodnot příslušných projekcí všem \hat{f}_i^0 .
2. Vypočítáme hodnoty projekcí (paprskových součtů) z daných hodnot \hat{f}_i^{l-1} , kde l je číslo iterace ($l = 1$ na počátku). Zde je též vhodná příležitost k tomu, abychom popř. uplatnili něco z fyzikálního modelu zobrazovacího systému.

Iterativní rekonstrukce – postup pokračování

- 3. Zvoleným způsobem dle použitého algoritmu IR porovnáme hodnoty odhadů jednotlivých hodnot projekcí s hodnotami skutečných naměřených projekcí a zpětně promítneme nezbytné korekce, tj. provedeme zpřesnění (update) hodnot voxelů. Např. pokud hodnoty odhadované projekce jsou příliš velké v porovnání se skutečnými, pak všechny hodnoty voxelů, které k tomuto přispívají, jsou zvoleným způsobem zmenšeny.**

Iterativní rekonstrukce – postup pokračování

- 4. Pokud je výše uvedený postup realizován pro všechny voxely a paprsky, pak je iterace ukončena.**
- 5. Celý postup opakujeme tak dlouho, dokud není dosaženo požadované přesnosti, nebo pokud nedosáhneme jistého počtu iterací.**

Iterativní rekonstrukce - ART

ART – Algebraic Reconstruction Technique je jedním z mnoha použitých algoritmů, které se používají do současnosti. Existují dva základní typy ART:

- aditivní

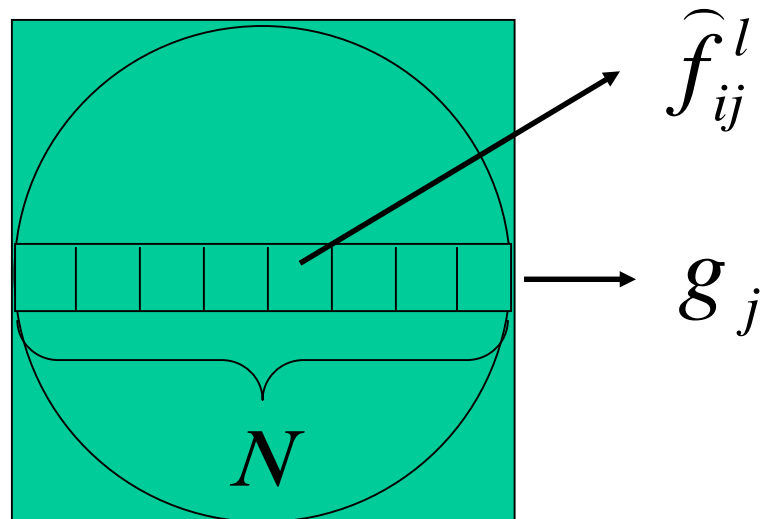
$$\hat{f}_{ij}^l = \hat{f}_{ij}^{l-1} + \frac{g_j - \sum_{i=1}^N \hat{f}_{ij}^{l-1}}{N}$$

- multiplikativní

$$\hat{f}_{ij}^l = \frac{g_j}{\sum_{i=1}^N \hat{f}_{ij}^{l-1}} \hat{f}_{ij}^{l-1}$$

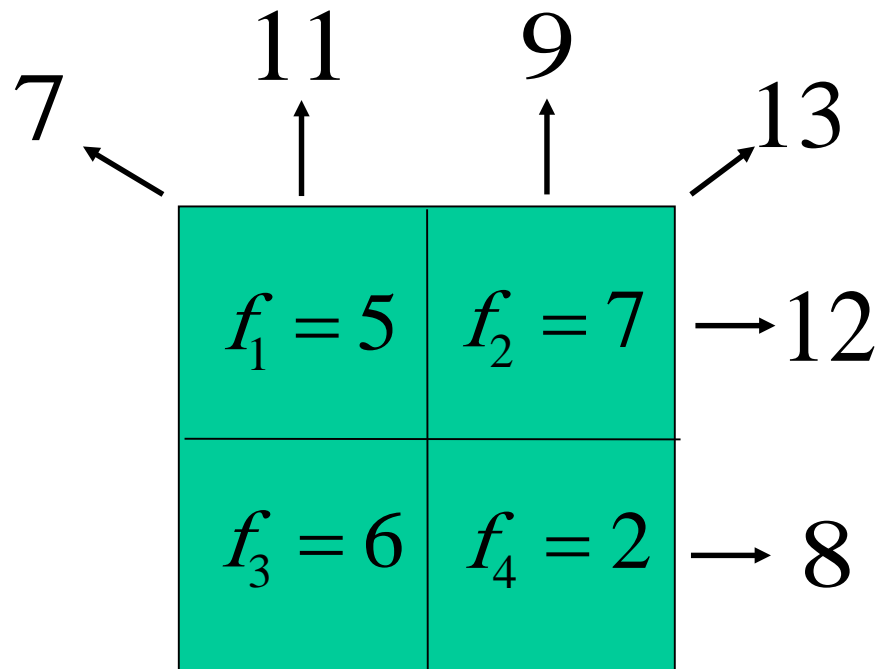
Iterativní rekonstrukce – ART pokračování

- kde: \hat{f}_{ij}^l - odhad hodnoty i -tého voxelu podél j -tého paprsku během l -té iterace,
- g_j - skutečný paprskový součet (data) podél j -tého paprsku,
- N - počet objemových elementů (voxelů) podél j -tého paprsku,



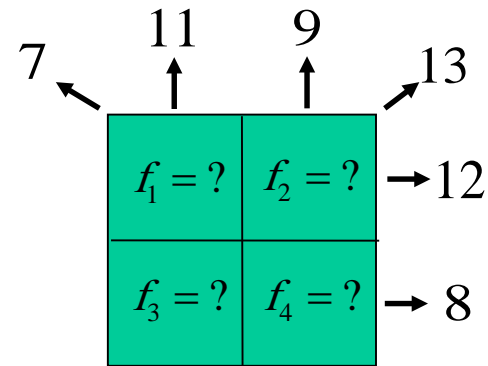
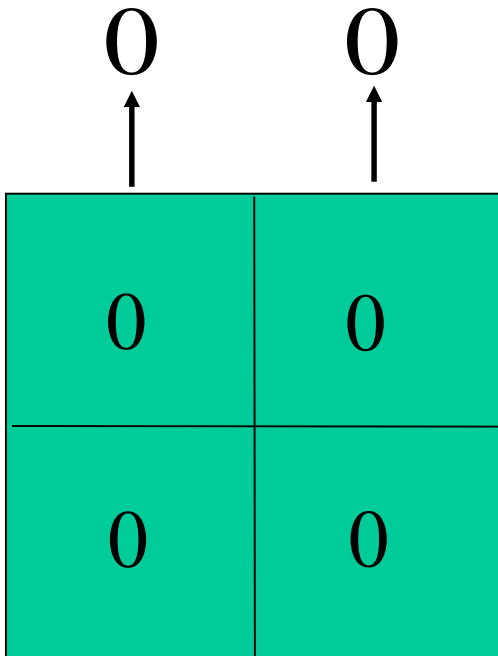
Iterativní rekonstrukce – ART aditivní - příklad

- skutečná naměřená data (projekce a paprskové součty)



Iterativní rekonstrukce – ART př. – pokrač.

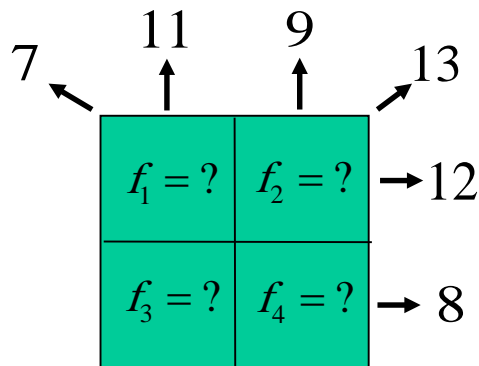
1/3
vertikální paprsky



$$\hat{f}_1^{1/3} = \hat{f}_3^{1/3} = 0 + \frac{11 - 0}{2} = 5,5$$

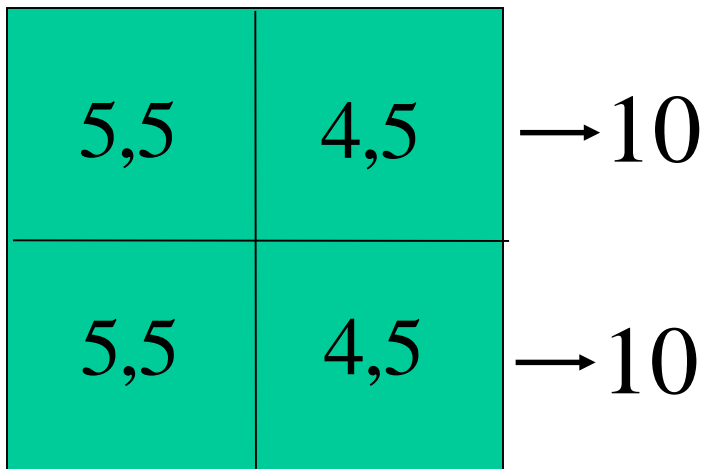
$$\hat{f}_2^{1/3} = \hat{f}_4^{1/3} = 0 + \frac{9 - 0}{2} = 4,5$$

Iterativní rekonstrukce – ART př. – pokrač.



2/3

horizontální paprsky



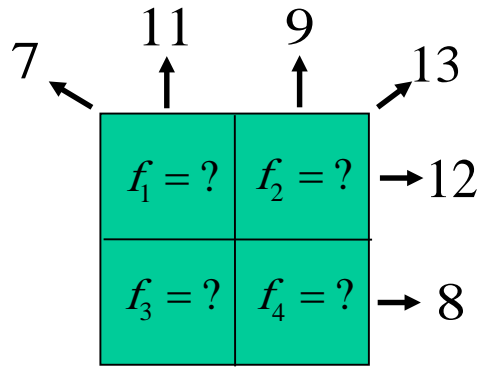
$$\hat{f}_1^{2/3} = 5,5 + \frac{12 - 10}{2} = 6,5$$

$$\hat{f}_2^{2/3} = 4,5 + \frac{12 - 10}{2} = 5,5$$

$$\hat{f}_3^{2/3} = 5,5 + \frac{8 - 10}{2} = 4,5$$

$$\hat{f}_4^{2/3} = 4,5 + \frac{8 - 10}{2} = 3,5$$

Iterativní rekonstrukce – ART př. – pokrač.



$3/3=1$

diagonální paprsky

10 ← → 10



$$\hat{f}_1^1 = 6,5 + \frac{7-10}{2} = 5$$

$$\hat{f}_2^1 = 5,5 + \frac{13-10}{2} = 7$$

$$\hat{f}_3^1 = 4,5 + \frac{13-10}{2} = 6$$

$$\hat{f}_4^1 = 3,5 + \frac{7-10}{2} = 2$$

viz
orig.
data

Analytické rekonstrukce

- přímé řešení rovnice $p(\xi', \Phi) = \int o(\xi, \eta) d\eta'$
- diskretizace primárního parametrického pole
 - omezení prostorové rozlišovací schopnosti
- dvě základní metody
 - Filtrovaná zpětná projekce
 - **2D Fourierova rekonstrukce**
(the central projection theorem, the Fourier slice theorem – věta o centrálním řezu)

Analytická rekonstrukce - 2D FT

$$o(\xi, \eta) = F^{-1} \{ O(w_\xi, w_\eta) \}$$

$$o(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} O(w_\xi, w_\eta) \exp[2\pi j(\xi w_\xi + \eta w_\eta)] dw_\xi dw_\eta$$

$$O(w_\xi, w_\eta) = F \{ o(\xi, \eta) \}$$

$$O(w_\xi, w_\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} o(\xi, \eta) \exp- [2\pi j(\xi w_\xi + \eta w_\eta)] d\xi d\eta$$

Analytická rekonstrukce - 2D FT

pootočení:

$$(\xi, \eta) \rightarrow (\xi', \eta') \quad \Phi = \operatorname{arctg} \frac{w_\eta}{w_\xi} \quad R = \sqrt{(w_\xi^2 + w_\eta^2)}$$

$$O(w_\xi, w_\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} o(\xi, \eta) \exp-(2\pi j \xi' R) d\xi' d\eta'$$

$$O(w_\xi, w_\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi', \Phi) \exp-(2\pi j \xi' R) d\xi'$$

$$O(w_\xi, w_\eta) = F \{p(\xi', \Phi)\}$$

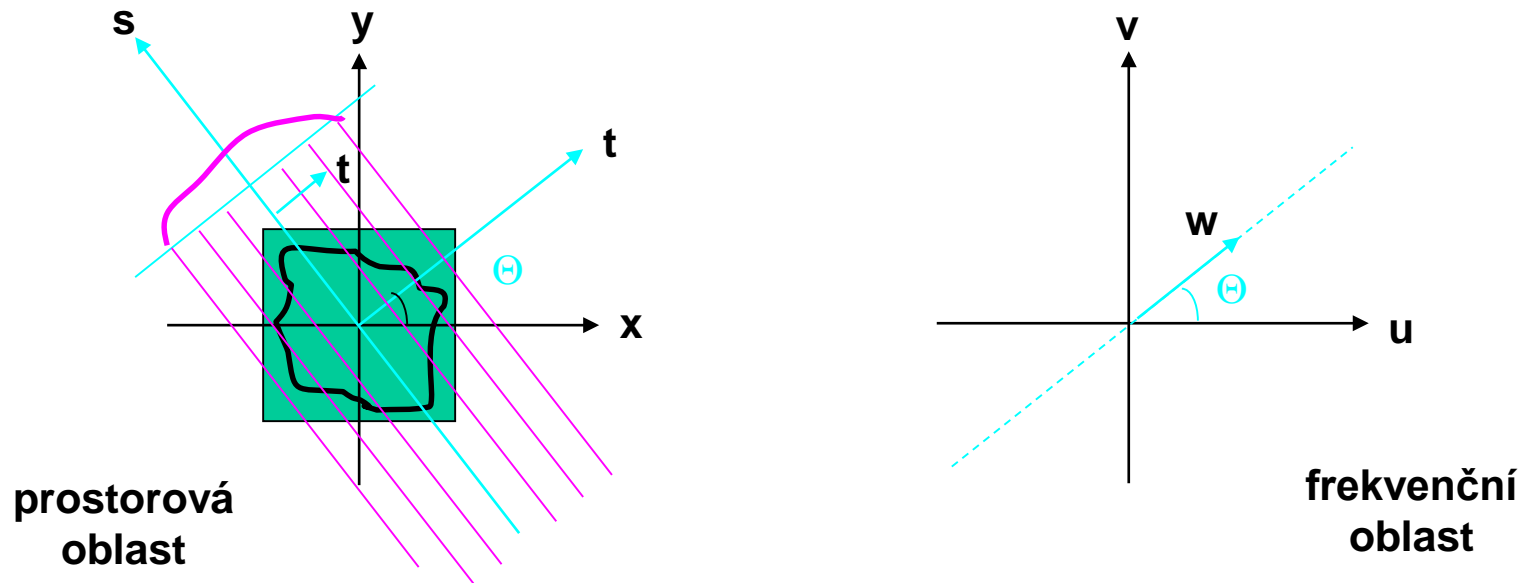
Analytická rekonstrukce - 2D FT

$$O(w_\xi, w_\eta) = F \{ p(\xi', \Phi) \}$$

Fyzikální význam rovnice:

Každý Fourierův koeficient denzitní (předmětové) funkce je roven Fourierovu koeficientu projekce sejmuté pod stejným úhlem.

Analytická rekonstrukce - 2D FT



- předpokládejme rotaci souřadnic a transformaci souřadnic

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Analytická rekonstrukce - 2D FT

- předpokládejme FT obrazu $f(x,y)$, z definice dostáváme

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- dále předpokládejme FT projekce $P_{\Theta}(t)$, dostáváme

$$S_{\Theta}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt$$

- nejprve uvažujme hodnoty $F(u,v)$ na přímce $v=0$ v rovině uv

$$\begin{aligned} F(u, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx \\ &= \int P_0(t) e^{-j2\pi ut} dt = S_0(w) \end{aligned}$$

Analytická rekonstrukce - 2D FT – pokrač.

- předchozí výsledek lze zobecnit a dostáváme výraz

$$F(w, \Theta) = S_{\Theta}(w)$$

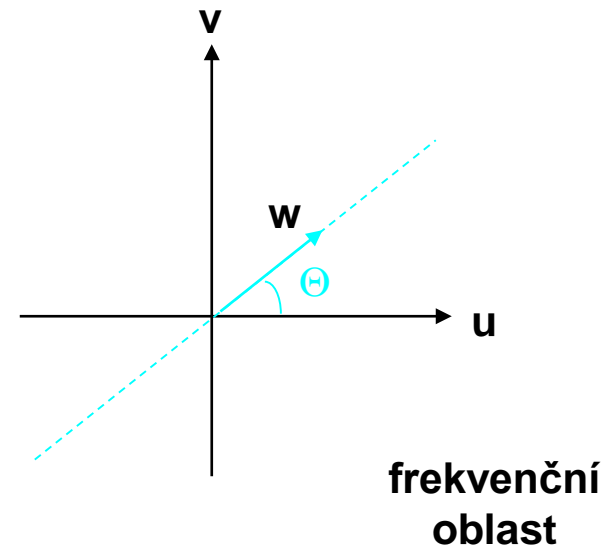
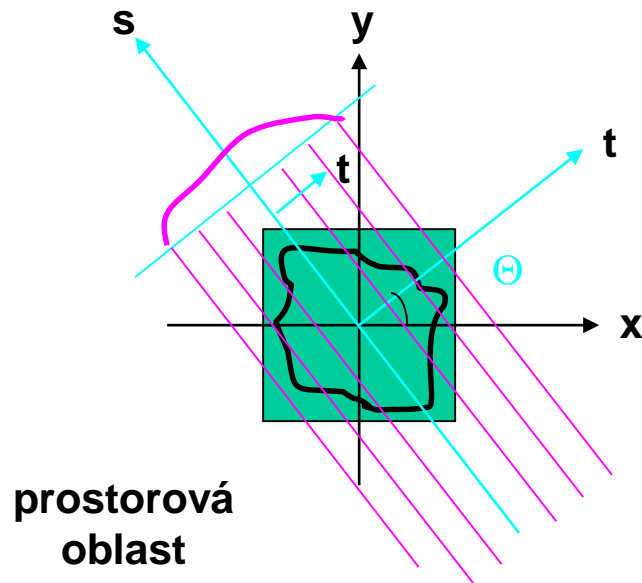
Fyzikální význam rovnice:

Každý Fourierův koeficient denzitní (předmětové) funkce je roven Fourierovu koeficientu projekce sejmuté pod stejným úhlem.

Analytická rekonstrukce - 2D FT – pokrač.

$$F(w, \Theta) = S_{\Theta}(w)$$

- důkaz platnosti předchozího vztahu



- předpokládejme rotaci souřadnic a transformaci souřadnic

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Analytická rekonstrukce - 2D FT – pokrač.

- je zřejmé, že $P_{\Theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s) ds$ a tudíž

$$S_{\Theta}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s) ds e^{-j2\pi wt} dt$$

- transformace pravé strany rovnice do souřadnic xy

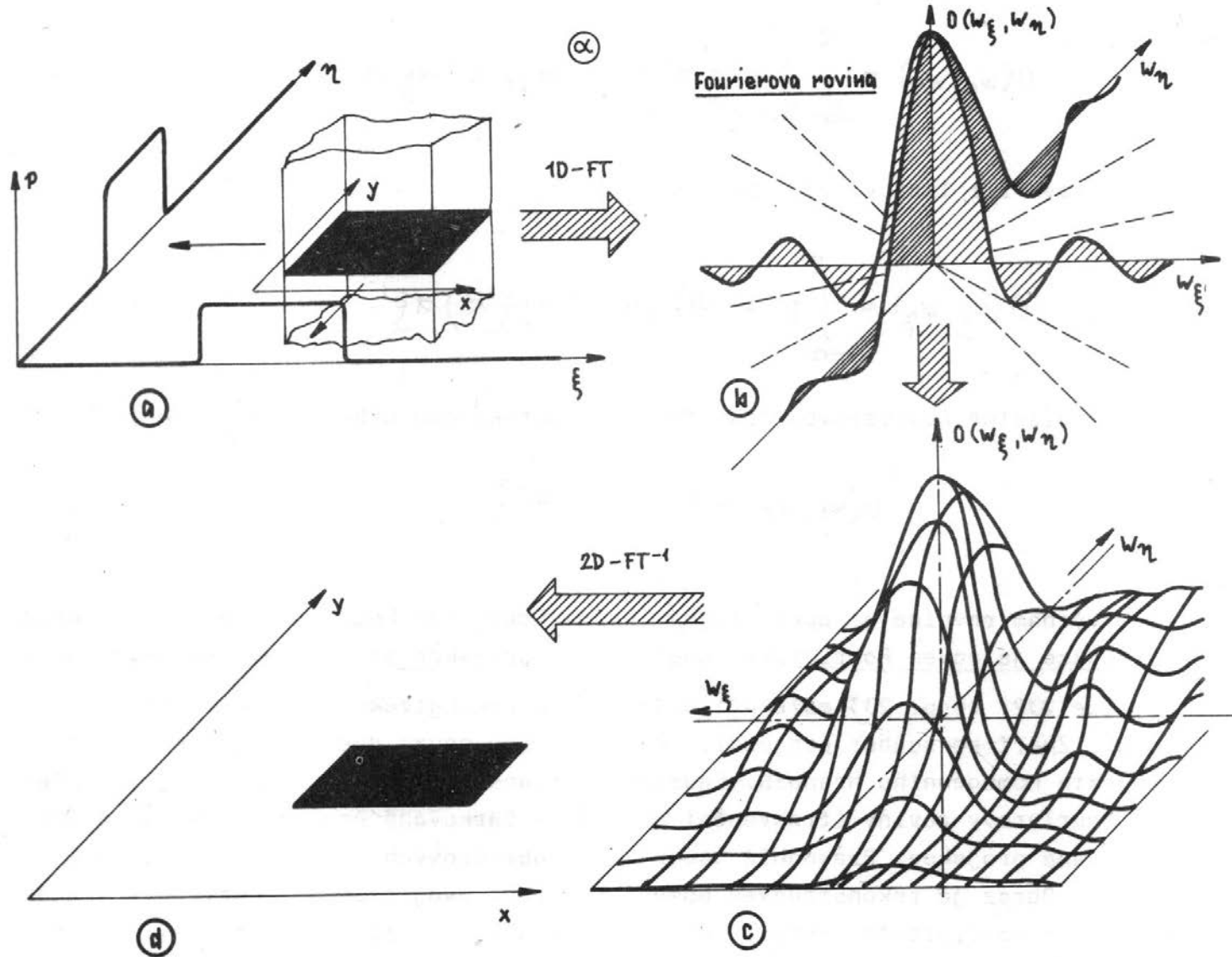
$$S_{\Theta}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi w(x \cos \Theta + y \sin \Theta)} dx dy = F(u, v)$$

pro $u = w \cos \Theta, \quad v = w \sin \Theta \quad = F(w, \Theta)$

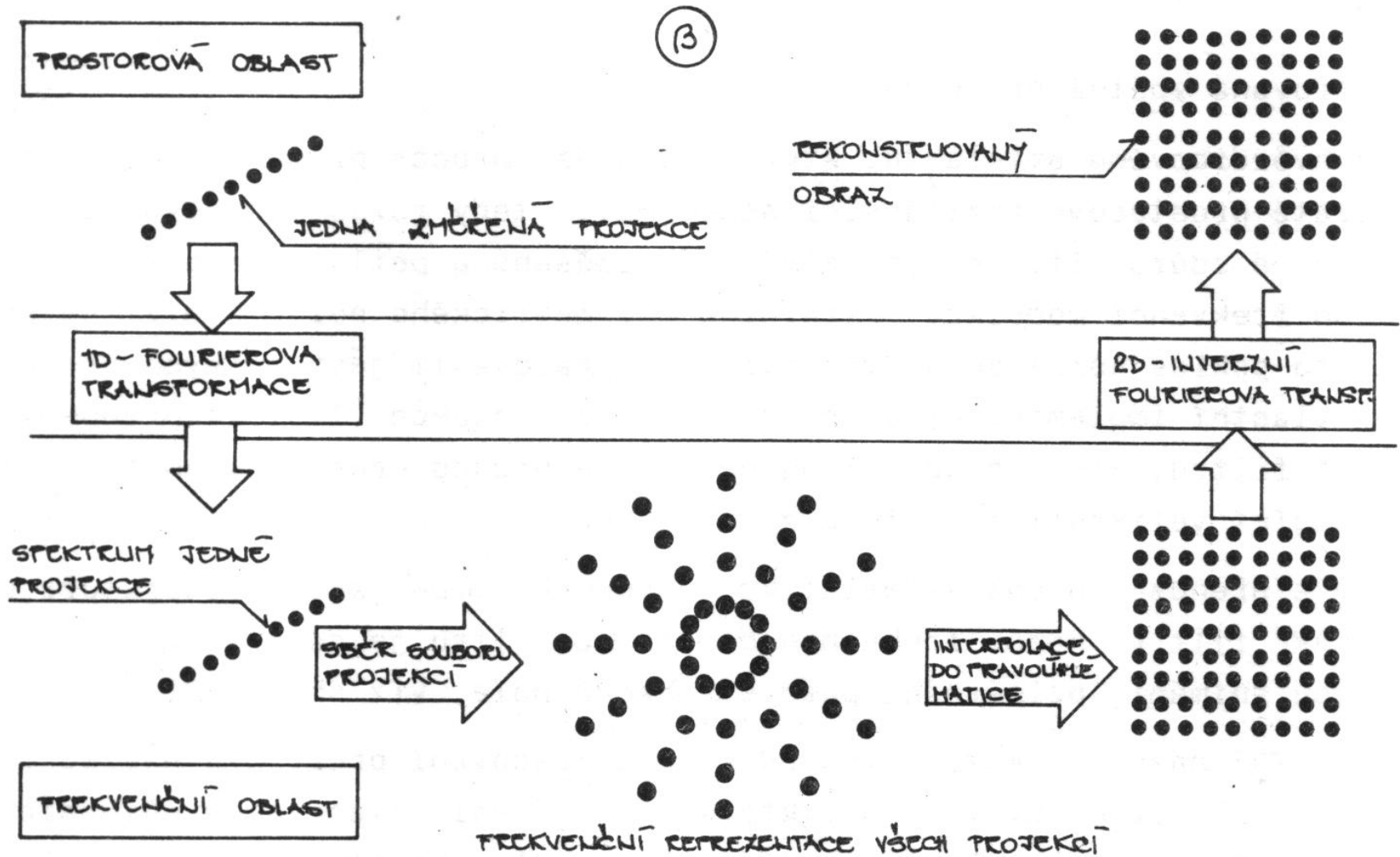
- pokud máme dostatečný počet projekcí, pak platí

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

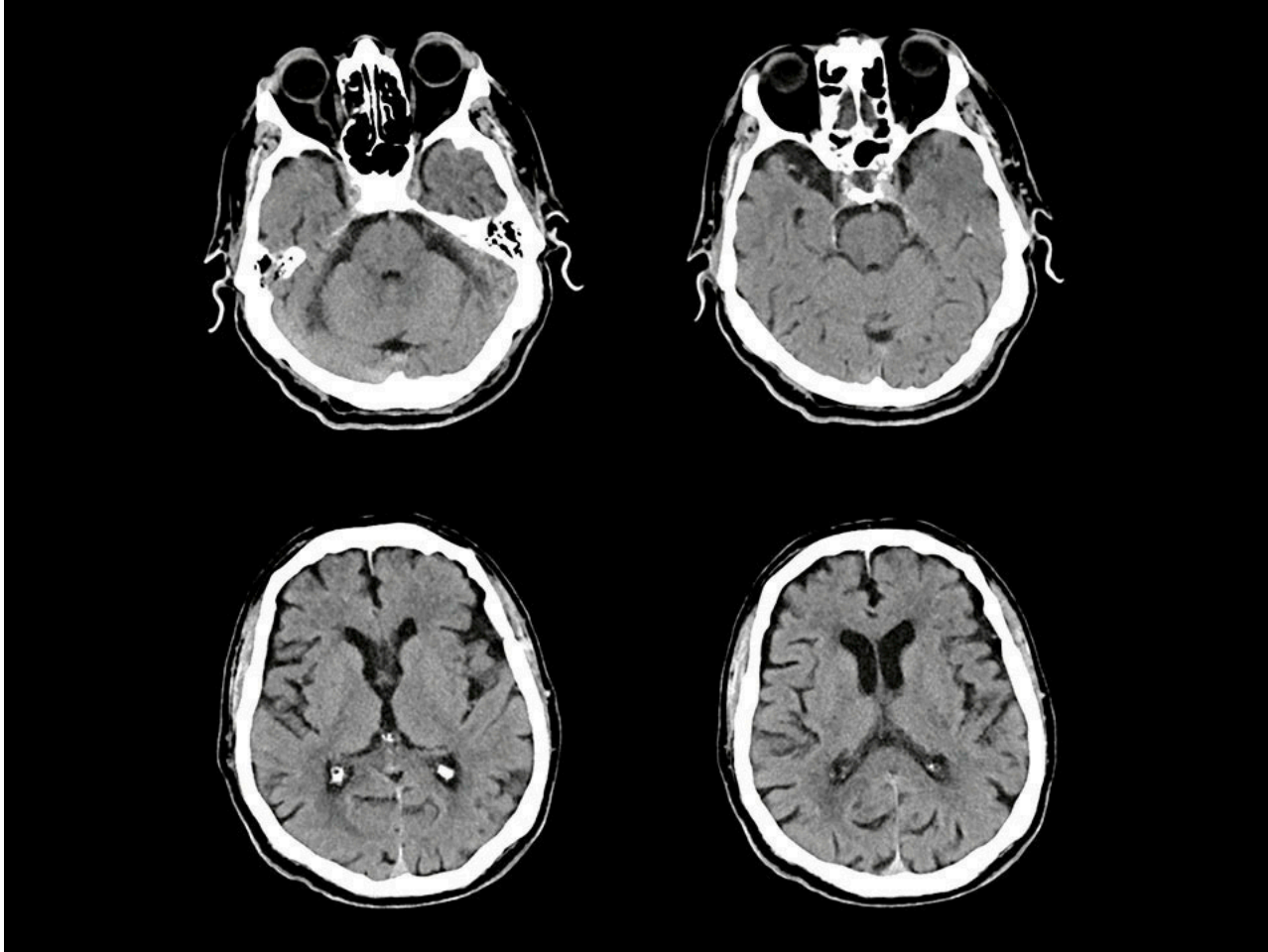
Analytická rekonstrukce - 2D FT – pokrač.



Analytická rekonstrukce - 2D FT – pokrač.



CT reconstructed image



Použité zdroje

- Ullmann V.: Jaderná fyzika, radiační fyzika, radioisotopy, 2023 [online]. V. Ullman. [cit. 29. 9. 2019]. Dostupné z: <https://astronuklfyzika.cz/strana2.htm/>
- Computed Tomography - Siemens Healthineers, 2023 [online]. [cit. 29. 9. 2019]. Dostupné z: <https://www.siemens-healthineers.com/computed-tomography/>
- BUSHBERG, Jerrold T. The essential physics of medical imaging [online]. Third edition. Philadelphia: Wolters Kluwer Health/Lippincott Williams & Wilkins, [2012], ©2012 [cit. 2019-09-29]. Dostupné z: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=2031899>.
- Steven W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing [online]. Second edition. San Diego: California Technical Publishing, [1999], [cit. 2019-09-29]. Dostupné z: <http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>.
- DRASTICH, Aleš. Zobrazovací systémy v lékařství. 1. vyd. Brno: VUT, 1983. 330 s.