

1. Přednáška

Obsah: Úvod do tvorby matematických modelů jako okrajové úlohy pro diferenciální rovnici.
Příklad 1D vedení tepla a lineární pružnost.
Diferenciální, variační, energetická formulace úloh.
Klasické, slabé řešení.
Přechody mezi řešeními.
Jednoznačnost slabého řešení, závislost slabého řešení na vstupních datech.
Problematika existence řešení a úplných prostorů.

Úvod:

- Matematické modelování vychází z určení základních kvantifikovatelných veličin, které charakterizují danou fyzikální situaci.
- Matematický model je vyvořen těmito veličinami a vztahy mezi nimi, které jsou často formulované za zjednodušujících předpokladů (zanedbání méně významných souvislostí). Může být formulován jako soustava rovnic a nerovnic.
- Okrajové nebo počátečně-okrajové diferenciální rovnice.
- Přesné řešení lze nalézt jen ve velmi specifickém případě (které často slouží i jako testovací příklad pro numerické metody) a musíme tedy hledat numerické řešení (pomocí numerických metod - MKP).
 - Přesné řešení dané fyzikální situace u .
 - Přesné řešení matematického modelu (pokud je jediné) u_M .
 - Přesné řešení zjednodušeného matematického modelu (např. linearizace) $\tilde{u}_M$.
 - Přesné řešení diskretizovaného modelu u_D .
 - Numerické (přibližné) řešení diskretizovaného modelu v konečné aritmetice (počítač) u_N .
 - Chyba $u - u_N$, $\tilde{u}_M - u_N$.
- Eliptické parciální diferenciální rovnice 2. řádu:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + \dots = 0,$$

kde předpokládám $u_{xy} = u_{yx}$.

$$\delta = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix},$$

$\delta > 0$ eliptické rovnice, $\delta = 0$ parabolické rovnice, $\delta < 0$ hyperbolické rovnice.

Příklad: Laplaceova rovnice

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, & \text{na } \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u &= \hat{u}, & \text{na } \Gamma = \partial\Omega \quad (\text{nehomogenní Dirichletova OP}) \end{aligned}$$

- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,
- řešením jsou harmonické funkce,
- koncentrace určité veličiny v rovnováze (teplota, chem. koncentrace),

- tvar membrány upevněné v rámečku (homogenní Dirichletova OP),
- rozložení teploty na homogenní desce při daných teplotách na krajích,
- $\delta = 1$.

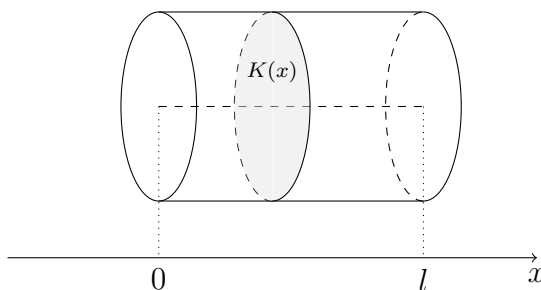
Jednorozměrné modely:

- Lineární stacionární model vedení tepla + zobecnění, matematický model lineární pružnosti.
- Okrajové úlohy pro diferenciální rovnici 2. řádu.

Vedení tepla:

- Rozložení teploty v tyči délky l s příčným řezem $K = K(x) = \text{konst.}$ o obsahu $|K| = \kappa$.
- Materiál charakterizovaný koeficientem tepelné vodivosti k [$Wm^{-1}K^{-1}$].
- Tyč je tepelně izolovaná po celém obvodovém plášti, tj. teplota je konstantní v každém příčném řezu.

Veličiny: Teplota $u = u(x)$ [K].
 Teplotní spád $\varepsilon = \varepsilon(x)$ [Km^{-1}].
 Tepelný tok $\tau = \tau(x)$ [Wm^{-2}].



Vztahy: Fourierův zákon: $\tau(x) = -k(x)\varepsilon(x)$, $k = k(x) > 0$.
 Teplotní spád: $\varepsilon(x_+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x_+) = u'(x)$.
 $\varepsilon(x_-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x_-) = u'(x)$.
 Rozhraní materiálů: $\varepsilon(x_-) \neq \varepsilon(x_+)$.

Tepelné zdroje: v úseku $\langle x_1, x_2 \rangle$ je za jednotku času vyvíjeno teplo

$$Q(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \kappa f(x) dx, \text{ kde } f \text{ je hustota tepelného zdroje.}$$

Příklad: $Q(x_1, x_2) = RI^2(x_2 - x_1)$ - teplo při průchodu elektrického proudu drátem, R - odpor, I - el. proud.

Okrajové podmínky: na levém konci udržujeme konstantní teplotu $\hat{u}$, tj. $u(0) = \hat{u}$,

na pravém konci je dán tepelný tok $\hat{\tau}$, tj. $-ku'(l) = \hat{\tau}$.

Bilanční formulace: Necht $(x_1, x_2) \in (0, l)$, potom platí bilance toků skrz hranici a zdroje:

$$\kappa\tau(x_1) - \kappa\tau(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \kappa f(\xi) d\xi = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \subset (0, l).$$

Diferenciální formulace (limitní přechod):

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= \hat{u}, \quad \text{Dirichletova OP} \\ -ku'(l) &= \hat{\tau}, \quad \text{Neumannova OP} \end{aligned}$$

Jiné OP: Izolovaný konec: $\hat{u} = 0$ (homogenní Dirichletova OP).

Podmínka přestupu tepla: $-ku'(l) = \alpha[u(l) - \hat{U}]$ (Newtonova, Robinova OP),
kde $\hat{U}$ je teplota vnějšího prostředí, α koeficient přestupu tepla.

Příklad: $f(x) = f = konst.$, $k = konst.$

$$\begin{aligned} -ku''(x) &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ -ku'(0) &= \hat{\tau}_1 \\ -ku'(l) &= \hat{\tau}_2 \\ u''(x) &= -\frac{f}{k} \\ u'(x) &= -\frac{f}{k}x + C_1 \\ u(x) &= -\frac{f}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \\ -ku'(0) &= -kC_1 = \hat{\tau}_1 \quad \rightarrow C_1 = -\frac{\hat{\tau}_1}{k} \\ -ku'(1) &= -f - kC_1 = \hat{\tau}_2 \quad \rightarrow C_1 = \frac{-\hat{\tau}_2 + f}{k} \end{aligned}$$

1. $C_1 \neq C_1$, tj. $-\hat{\tau}_1 \neq -\hat{\tau}_2 + f \rightarrow$ žádné řešení

2. $C_1 = C_1$, tj. $-\hat{\tau}_1 = -\hat{\tau}_2 + f \rightarrow$ nekonečně mnoho řešení:
 $u(x) = -\frac{f}{2k}x^2 - \frac{\hat{\tau}_1}{k}x + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$

Jiné DR: Přestup tepla obvodovým pláštěm:

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' + k_0u &= f(x) + k_0\hat{U}, \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ k_0 &= \frac{\alpha\omega}{\kappa}, \quad \omega \text{ je obvod řezu} \end{aligned}$$

Šíření tepla konvekci:

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' + c\rho(pu)' &= f(x) + k_0\hat{U}, \quad \forall x \in \Omega = (0, l), \\ \text{pohyb prostředí rychlostí } p &= p(x) \text{ v každém řezu je stejná,} \\ c \text{ je měrné teplo, } \rho &\text{ hustota prostředí.} \end{aligned}$$

Lineární pružnost:

- Tyč délky l s příčným řezem $K = K(x) = konst.$ o obsahu $|K| = \kappa$.
- Materiál charakterizovaný (Youngovým) modulem pružnosti E [Pa].

Veličiny: Posunutí $u = u(x)$ [m].

Deformace $\varepsilon = \varepsilon(x)$ bezrozměrná.

Napětí $\tau = \tau(x)$ [Pa].

Vztahy: Hookův zákon: $\tau(x) = E(x)\varepsilon(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Deformace:} \quad \varepsilon(x_+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x_+) = u'(x). \\ \varepsilon(x_-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x_-) = u'(x). \end{aligned}$$

Objemová síla: působení na úsek $\langle x_1, x_2 \rangle$

$$F(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \kappa f(x) dx, \text{ kde } f \text{ je hustota objemové síly.}$$

Příklad: $f(x) = \rho(x)g$, $\rho(x)$ je hustota, g je gravitační konstanta.

Okrajové podmínky: na levém konci je tyč pevně zafixována, tj. $u(0) = 0$,

na pravém konci působí tah nebo tlak o velikosti $\hat{\tau}$, tj. $Eu'(l) = \hat{\tau}$.

Diferenciální formulace:

$$-(Eu'(x))' = f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l)$$

$$u(0) = 0, \quad \text{Dirichletova OP}$$

$$Eu'(l) = \hat{\tau}, \quad \text{Neumannova OP}$$

- Linearita $\times$ nelinearita

- Vstupní data: $f, \hat{u}, \hat{\tau}$.

- Linearita zobrazení (úlohy) $(f, \hat{u}, \hat{\tau}) \rightarrow u$, tj.

pokud u_1 a u_2 jsou řešení odpovídající vstupním datům $(f_1, \hat{u}_1, \hat{\tau}_1)$ a $(f_2, \hat{u}_2, \hat{\tau}_2)$,
potom $u_1 + u_2$ je řešení odpovídající $(f_1 + f_2, \hat{u}_1 + \hat{u}_2, \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2)$
a cu_1 ($c \in \mathbb{R}$) je řešení odpovídající datům $(cf_1, c\hat{u}_1, c\hat{\tau}_1)$.

- Nelinearita: např. $k = k(u) = k(x, u(x)) \rightarrow$ linearizace, iterační postupy.

- Nespojité vstupní data, heterogenní materiálové prostředí:

- Spojitost funkce f , řešení u, u', u'' , koeficientu k, k' .

- Nespojitosť např. v f - skok v bodě ξ : řešení diferenciální rovnice na dvou samostatných částech $(0, \xi)$ a (ξ, l) a podmínky přechodu:

$$\lim_{x \rightarrow \xi-} u(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} u(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi-} -ku'(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} -ku'(x).$$

- Vede k obecnějšímu chápání řešení okrajové úlohy.

Variační formulace:

- Minimum energie, rovnost prací.

- Diferenciální formulace: Úloha najít $u \in C^2(\langle 0, l \rangle)$ tak, aby

$$-(ku'(x))' = f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l)$$

$$u(0) = \hat{u}, \quad \text{hlavní OP}$$

$$-ku'(l) = \hat{\tau}, \quad \text{přirozená OP}$$

- Lineární prostor U :

- funkce definované a spojité na $\langle 0, l \rangle$,

- po částech hladké, tj. $u \in C^1(\xi_{i-1}, \xi_i)$ pro nějaké $0 = \xi_0 < \xi_1 \dots \xi_{m-1} < \xi_m = l$,

– omezená první derivace, tj. $|u'(x)| \leq K \quad \forall x \in (\xi_{i-1}, \xi_i), i = 1, \dots, m$.

- Množina testovacích funkcí (v mechanice množina virtuálních posunutí):

$$V = \{v \in U : v(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_D\}, \quad \text{např.} \quad \Gamma_D = \{0\}.$$

- Množina přípustných funkcí

$$U_D = \{u \in U : u(x) = \hat{u} \quad \forall x \in \Gamma_D\}, \quad \text{např.} \quad \Gamma_D = \{0\}.$$

- Přenásobení DR testovací funkcí, integrování přes oblast $\Omega = (0, l)$

$$-(ku'(x))' = f(x) \quad / \cdot v \quad / \int_0^l dx$$

$$\int_0^l -(ku')'v \, dx = \int_0^l f v \, dx.$$

- Per partes, dosazení OP $\rightarrow$ variační identita:

$$-[ku'v]_0^l + \int_0^l ku'v' \, dx = \int_0^l f v \, dx$$

$$\int_0^l ku'v' \, dx = \int_0^l f v \, dx + \underbrace{ku'(l)v(l)}_{-\hat{\tau}} - \underbrace{ku'(0)v(0)}_0$$

$$\int_0^l ku'v' \, dx = \int_0^l f v \, dx - \hat{\tau}v(l) \quad \forall v \in V,$$

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V.$$

- Pokud k a f jsou po částech spojitě a omezené, potom $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ a $b : U \rightarrow \mathbb{R}$ jsou definované na celém U .

Jiné úlohy:

- **DR:** Úloha najít $u \in C^2(\langle 0, l \rangle)$ tak, aby

$$-(ku'(x))' = f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l)$$

$$u(0) = 0,$$

$$-ku'(l) = \alpha(u(l) - \hat{U}).$$

VR: Úloha najít $u \in U_D$ tak, aby

$$\underbrace{\int_0^l ku'v' \, dx + \alpha u(l)v(l)}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^l f v \, dx - \alpha \hat{U}v(l)}_{b(v)}, \quad \forall v \in V$$

$$U_D = V = \{u \in U : u(0) = 0\}$$

- **DR:** Úloha najít $u \in C^2(\langle 0, l \rangle)$ tak, aby

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' + pu' &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= 0, \\ u(l) &= 0. \end{aligned}$$

VR: Úloha najít $u \in U_D$ tak, aby

$$\underbrace{\int_0^l (ku'v' + pu'v) dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^l f v dx}_{b(v)}, \quad \forall v \in V$$

$$U_D = V = \{u \in U : u(0) = 0, u(l) = 0\}$$

- **DR:** Úloha najít $u \in C^2(\langle 0, l \rangle)$ tak, aby

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' + qu &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= 0, \\ u(l) &= 0. \end{aligned}$$

VR: Úloha najít $u \in U_D$ tak, aby

$$\underbrace{\int_0^l (ku'v' + quv) dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^l f v dx}_{b(v)}, \quad \forall v \in V$$

$$U_D = V = \{u \in U : u(0) = 0, u(l) = 0\}$$

qu je reaktivní člen (např. přísun tepla chemickou reakcí).

Vlastnosti $a(u, v)$, $b(v)$:

- **Linearita:** U je lineární prostor, $a(u, v)$ budeme nazývat bilineární formou a $b(v)$ lineárním funkcionálem, pokud jsou zobrazení a , b lineární v každém argumentu, tj. pro libovolné $u_1, u_2, v_1, v_2 \in U$ a $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v), \\ a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2), \\ b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \alpha_1 b(v_1) + \alpha_2 b(v_2). \end{aligned}$$

Příklad:

$$a(u, v) = \int_0^l ku'v' dx, \quad b(v) = \int_0^l f v dx - \hat{\tau}v(l)$$

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \int_0^l k(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)' v' dx = \alpha_1 \int_0^l ku_1' v' dx + \alpha_2 \int_0^l ku_2' v' dx = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$$

$$a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \int_0^l ku'(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)' dx = \alpha_1 \int_0^l ku' v_1' dx + \alpha_2 \int_0^l ku' v_2' dx = \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2)$$

$$\begin{aligned}
b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \int_0^l f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) dx - \hat{\tau}(\alpha_1 v_1(l) + \alpha_2 v_2(l)) = \alpha_1 \left(\int_0^l f v_1 dx - \hat{\tau} v_1(l) \right) + \alpha_2 \left(\int_0^l f v_2 dx - \hat{\tau} v_2(l) \right) \\
&= \alpha_1 b(v_1) + \alpha_2 b(v_2)
\end{aligned}$$

- **Symetrie:** Bilineární forma $a(u, v)$ je symetrická, pokud

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in U.$$

Příklad:

$$a(u, v) = \int_0^l k u' v' dx = \int_0^l k v' u' dx = a(v, u) \quad \forall u, v \in U$$

Příklad:

$$\exists u, v \in U : a(u, v) = \int_0^l (k u' v' + p u' v) dx \neq \int_0^l (k v' u' + p v' u) dx = a(v, u)$$

- **Nezápornost (pozitivní semidefinitnost):** $a(u, u) \geq 0, \forall u \in U$.
-

Příklad:

$$a(u, u) = \int_0^l k (u')^2 dx \quad \text{pro } k \geq k_0 > 0 \quad \forall u \in U$$

- **V-elipticita (pozitivní definitnost):** abstraktní verze energie

- $\|u\|_{2,1}^2 = \int_{\Omega} [u^2 + (u')^2] dx = \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2,$
 - existuje konstanta $m > 0$ taková, že $m \|v\|_{2,1}^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V$.
-

Příklad: $a(u, v) = \int_0^l (k u' v' + q u v) dx$

$$a(v, v) = \int_0^l (k (v')^2 + q v^2) dx \geq \min\{k, q\} \int_0^l ((v')^2 + v^2) dx = m \|v\|_{2,1}^2, \quad \forall v \in V$$

Příklad: $a(u, v) = \int_0^l k u' v' dx$

$$\exists 0 < k_0 < k : a(v, v) = \int_0^l k (v')^2 dx \geq k_0 \int_0^l (v')^2 dx = \alpha k_0 \int_0^l (v')^2 dx + k_0(1-\alpha) \int_0^l (v')^2 dx \geq \dots, \quad \forall v \in V$$

$$\int_0^x v'(z) dz = [v(z)]_0^x = v(x) - \underbrace{v(0)}_0, \quad \forall v \in V$$

$$v(x)^2 = \left(\int_0^x 1 \cdot v'(z) dz \right)^2 \stackrel{C.-S.}{\leq} \underbrace{\int_0^x 1^2 dz}_x \underbrace{\int_0^x (v'(z))^2 dz}_{\leq \int_0^l (v'(z))^2 dz, x \in (0,l)} \quad \forall v \in V$$

$$\int_0^l v(x)^2 dx \leq \int_0^l \left(x \int_0^l (v'(z))^2 dz \right) dx = \int_0^l x dx \int_0^l (v'(z))^2 dz = \frac{l^2}{2} \int_0^l (v'(z))^2 dz$$

$$\int_0^l (v')^2 dx \geq \frac{2}{l^2} \int_0^l v^2 dx$$

$$\dots \geq \alpha k_0 \frac{2}{l^2} \int_0^l v^2 dx + k_0(1-\alpha) \int_0^l (v')^2 dx \geq \min\{\alpha k_0 \frac{2}{l^2}, k_0(1-\alpha)\} \int_0^l [v^2 + (v')^2] dx = m \|v\|_{2,1}^2, \quad \forall v \in V$$

• **Omezenost:**

- Existuje konstanta $M > 0$, pro kterou platí: $|a(u, v)| \leq M \|u\|_{2,1} \|v\|_{2,1}$.
- Existuje konstanta $B > 0$ takové, že $|b(v)| \leq B \|v\|_{2,1}$.

Příklad: $a(u, v) = \int_0^l ku'v' dx$

$$\left| \int_0^l ku'v' dx \right| \leq \max_{x \in (0,l)} (k) \left| \int_0^l u'v' dx \right| \stackrel{C.-S.}{\leq} \max_{x \in (0,l)} (k) \underbrace{\sqrt{\int_0^l (u')^2 dx}}_{\|u'\|_{2,0}} \underbrace{\sqrt{\int_0^l (v')^2 dx}}_{\|v'\|_{2,0}} \leq$$

$$\leq \max_{x \in (0,l)} (k) \underbrace{\sqrt{\int_0^l [(u')^2 + u^2] dx}}_{\|u\|_{2,1}} \underbrace{\sqrt{\int_0^l [(v')^2 + v^2] dx}}_{\|v\|_{2,1}} = M \|u\|_{2,1} \|v\|_{2,1}$$

Příklad: $b(v) = \int_0^l f v dx - \hat{\tau} v(l)$

$$\left| \int_0^l f v dx - \hat{\tau} v(l) \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \left| \int_0^l f v dx \right| + |-\hat{\tau} v(l)| \leq \dots \quad \forall v \in V$$

$$\left| \int_0^l f v dx \right| \stackrel{C.-S.}{\leq} \underbrace{\sqrt{\int_0^l f^2 dx}}_{\|f\|_{2,0}} \underbrace{\sqrt{\int_0^l v^2 dx}}_{\|v\|_{2,0}} \leq B_1 \underbrace{\sqrt{\int_0^l [v^2 + (v')^2] dx}}_{\|v\|_{2,1}} = B_1 \|v\|_{2,1} \quad \forall v \in V$$

$$\int_0^l v'(x) dx = v(l) - \underbrace{v(0)}_0$$

$$|-\hat{\tau}v(l)| \leq |\hat{\tau}| \left| \int_0^l 1 \cdot v'(x) dx \right| \leq \underbrace{\sqrt{\int_0^l 1^2 dx}}_{\sqrt{l}} \underbrace{\sqrt{\int_0^l (v')^2 dx}}_{\|v'\|_{2,0}} \leq |\hat{\tau}| \sqrt{l} \|v\|_{2,1} \quad \forall v \in V$$

$$\dots \leq B_1 \|v\|_{2,1} + |\hat{\tau}| \sqrt{l} \|v\|_{2,1} \leq \max\{B_1, \sqrt{l}|\hat{\tau}|\} \|v\|_{2,1} = B \|v\|_{2,1}$$

Energetická formulace:

Pokud a je bilineární, symetrická a pozitivně definitní forma na $U \times U$, pak definuje skalární součin a tedy i normu $\|u\|_a = \|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$ - energetická norma.

Energetický funkcionál pro bilineární formu a a lineární funkcionál b :

$$J : U \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad J = \frac{1}{2}a(u, u) - b(u)$$

EF: Úloha najít $u \in U_D$ tak, aby

$$J(u) = \min\{J(w) : w \in U_D\}.$$

Řešení úloh:

Definice (klasické řešení): Nechť $k \in C^1(0, l)$, f je na $(0, l)$ omezená, $\hat{u}, \hat{\tau} \in \mathbb{R}$. Klasickým řešením okrajové úlohy

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= \hat{u}, \\ -ku'(l) &= \hat{\tau}. \end{aligned}$$

nazveme takovou funkci $u \in C^2(0, l)$, která splňuje danou diferenciální rovnici a okrajové podmínky.

Definice (slabé řešení): Nechť k, f jsou po částech spojitě a omezené, $\hat{u}, \hat{\tau} \in \mathbb{R}$. Potom zobecněným (slabým) řešením okrajové úlohy

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= \hat{u}, \\ -ku'(l) &= \hat{\tau}. \end{aligned}$$

nazveme funkci u , pro kterou platí

$$\begin{aligned} u &\in U_D, \\ a(u, v) &= b(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

kde $U_D = \{u \in U : u(0) = \hat{u}\}$ nazýváme prostorem přípustných funkcí a prostor $V = \{v \in U : v(0) = 0\}$ nazýváme prostorem testovacích funkcí.

Věta: Předpokládejme, že bilineární forma a je symetrická a nezáporná. Potom u je zobecněným řešením okrajové úlohy, tj.

$$\begin{aligned} u &\in U_D, \\ a(u, v) &= b(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} u &\in U_D, \\ J(u) &= \min\{J(w) : w \in U_D\} \end{aligned}$$

kde $J : U \rightarrow \mathbb{R}$, $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - b(v)$ je energetický funkcionál.

Věta: Je-li u klasické řešení, je i slabým řešením.

$$C^2(\Omega) \subset C^1(\Omega) \subset U(\Omega).$$

Poznámka: Úlohu lze přeformulovat (pokud chceme stejné prostory přípustných a testovacích funkcí)

$$\text{Zvolíme } \tilde{u} \in U_D,$$

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} + u_0, \quad u_0 \in V, \\ a(\tilde{u} + u_0, v) &= b(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

$$u_0 \in V,$$

$$a(u_0, v) = b(v) - a(\tilde{u}, v) = b_D(v), \quad \forall v \in V.$$

Jednoznačnost slabého řešení:

Věta: Nechť a je V -eliptická (pozitivně definitní) bilineární forma, potom existuje nejvýše jedno slabé řešení úlohy

$$\begin{aligned} u &\in U_D, \\ a(u, v) &= b(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Důkaz: Nechť $u_1 \in U_D$, $u_2 \in U_D$ jsou řešení, potom $u_1 - u_2 \in V$,
Platí (volím $v = u_1 - u_2 \in V$)

$$\begin{aligned} a(u_1, u_1 - u_2) &= b(u_1 - u_2), \\ a(u_2, u_1 - u_2) &= b(u_1 - u_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) &= b(u_1 - u_2) - b(u_1 - u_2) = 0 \\ a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) &= 0 \end{aligned}$$

V-elipticita: $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq m \|u_1 - u_2\|_{2,1}^2$, pro $m > 0$

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{2,1}^2 &= 0 \\ u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

Spojitá závislost slabého řešení na datech:

Věta: *Nechť u je slabé řešení úlohy (a je V -eliptická (pozitivně definitní) bilineární forma a a b je lineární omezený funkcionál)*

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= \hat{u}, \\ -ku'(l) &= \hat{\tau}. \end{aligned}$$

Označme u_1 řešení úlohy pro vstupní data $f_1, \hat{\tau}_1, \hat{u}$ a u_2 řešení úlohy pro vstupní data $f_2, \hat{\tau}_2, \hat{u}$, potom existuje konstanta C taková, že

$$\|u_1 - u_2\|_{2,1} \leq C (\|f_1 - f_2\|_{2,0} + |\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2|).$$

Důkaz:

$$u_1 \in U_D : \quad a(u_1, v) = \int_0^l f_1 v dx - \hat{\tau}_1 v(l) \quad \forall v \in V$$

$$u_2 \in U_D : \quad a(u_2, v) = \int_0^l f_2 v dx - \hat{\tau}_2 v(l) \quad \forall v \in V$$

$$a(u_1 - u_2, v) = \int_0^l (f_1 - f_2) v dx - (\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2) v(l) \quad \forall v \in V$$

volím $v = u_1 - u_2 \in V$:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \int_0^l (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) dx - (\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2)(u_1(l) - u_2(l))$$

$$V\text{-elipticita } a: m\|u_1 - u_2\|_{2,1}^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)$$

$$Omezenost \ b: |b(v)| = \left| \int_0^l f v dx - \hat{\tau} v(l) \right| \leq \left| \int_0^l f v dx \right| + |\hat{\tau} v(l)| \leq \|f\|_{2,0} \|v\|_{2,1} + |\hat{\tau}| \sqrt{l} \|v\|_{2,1}$$

$$m\|u_1 - u_2\|_{2,1}^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \|f_1 - f_2\|_{2,0} \|u_1 - u_2\|_{2,1} + |\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2| \sqrt{l} \|u_1 - u_2\|_{1,2}$$

$$\|u_1 - u_2\|_{2,1} \leq \frac{1}{m} \left(\|f_1 - f_2\|_{2,0} + |\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2| \sqrt{l} \right) \leq C (\|f_1 - f_2\|_{2,0} + |\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2|)$$

Věta: *Nechť u je slabé řešení úlohy (a je V -eliptická (pozitivně definitní) bilineární forma a a b je lineární omezený funkcionál)*

$$\begin{aligned} -(ku'(x))' &= f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, l) \\ u(0) &= \hat{u}, \\ -ku'(l) &= \hat{\tau}. \end{aligned}$$

Pokud u_1 je řešení odpovídající vstupním datům $f, \hat{\tau}, \hat{u}_1$, u_2 je řešení odpovídající vstupním datům $f, \hat{\tau}, \hat{u}_2$ a $\tilde{u}_1 \in U_D^1$, tj. $\tilde{u}_1(0) = \hat{u}_1$, $\tilde{u}_2 \in U_D^2$, tj. $\tilde{u}_2(0) = \hat{u}_2$. Potom existuje konstanta C taková, že

$$\|u_1 - u_2\|_{2,1} \leq C \inf \{ \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1} : \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in U, \tilde{u}_1(0) = \hat{u}_1, \tilde{u}_2(0) = \hat{u}_2 \}.$$

Důkaz: Zvolím $\tilde{u}_1 \in U_D^1$ a $\tilde{u}_2 \in U_D^2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \tilde{u}_1 + w_1, & w_1 \in V : & \quad a(w_1, v) = b(v) - a(\tilde{u}_1, v), \quad \forall v \in V \\ u_2 &= \tilde{u}_2 + w_2, & w_2 \in V : & \quad a(w_2, v) = b(v) - a(\tilde{u}_2, v), \quad \forall v \in V \\ & & & \quad a(w_1 - w_2, v) = a(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, v), \quad \forall v \in V \\ & & & \quad a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = a(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, w_1 - w_2), \quad w_1 - w_2 \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \|w_1 - w_2\|_{2,1}^2 &\stackrel{V\text{-}elip.}{\leq} a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = a(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, w_1 - w_2) \stackrel{omez.}{\leq} M \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1} \|w_1 - w_2\|_{2,1} \\ \|w_1 - w_2\|_{2,1} &\leq \frac{M}{m} \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1} \end{aligned}$$

$$\|u_1 - u_2\|_{2,1} = \|\tilde{u}_1 + w_1 - \tilde{u}_2 - w_2\|_{2,1} \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1} + \|w_1 - w_2\|_{2,1} \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1} + \frac{M}{m} \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1} \leq C \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{2,1}$$

Existence slabého řešení:

Existence slabého řešení úlohy

$$\begin{aligned} u &\in V, \\ a(u, v) &= b_D(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ existence minima funkcionalu

$$\begin{aligned} u &\in V, \\ J_D(u) &= \min_{v \in V} J_D(v), \quad J_D(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - b_D(v). \end{aligned}$$

1. J_D je zdola omezený funkcional.

Důkaz: J_D je zdola omezený, tj. $\exists \inf_{v \in V} J_D(v) = \mu > -\infty$,

$$J_D(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - b_D(v) \geq \underbrace{\frac{1}{2} \|v\|_{2,1}^2}_{V\text{-}elipticita \ a} - \underbrace{B_D \|v\|_{2,1}}_{omez. \ b} \geq \min_t \left(\frac{1}{2} m t^2 - B_D t \right) = \dots$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 12 m t^2 - B_D t \\ f'(t) &= m t - B_D = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stacionární bod: } t &= \frac{B_D}{m} \\ f''(t) &= m > 0 \rightarrow \text{stacionární bod je bod minima} \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{1}{2} \frac{B_D^2}{m} - \frac{B_D^2}{m} = -\frac{B_D^2}{m} = \mu > -\infty$$

2. Minimalizující posloupnost je Cauchyovská (splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku).

Důkaz: Existuje infimum $\rightarrow$ existuje minimalizující posloupnost.

Definujeme minimalizující posloupnost: $\{v_n\} \subset V$ tak, že $J(v_n) \leq \mu + \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} m_1 \|v_m - v_n\|_{2,1}^2 &\stackrel{V\text{-}elip.}{\leq} a(v_m - v_n, v_m - v_n) = a(v_m, v_m) - a(v_n, v_m) - a(v_m, v_n) + a(v_n, v_n) \\ &\quad [+ a(v_m, v_m) - a(v_m, v_m) + a(v_n, v_n) - a(v_n, v_n)] = \\ &= 2a(v_m, v_m) + 2a(v_n, v_n) - a(v_n, v_m + v_n) - a(v_m, v_m + v_n) = \\ &= 2a(v_m, v_m) - 4b_D(v_m) + 2a(v_n, v_n) - 4b_D(v_n) - a(v_m + v_n, v_m + v_n) + 4b_D(v_m + v_n) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8J_D\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right) &= -8\left[\frac{1}{2}a\left(\frac{v_m + v_n}{2}, \frac{v_m + v_n}{2}\right) - b_D\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right)\right] = \\ &= -8\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}a(v_m + v_n, v_m + v_n) + 8\frac{1}{2}b_D(v_m + v_n) = \\ &= -a(v_m + v_n, v_m + v_n) + 4b_D(v_m + v_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots 4\left[\frac{1}{2}a(v_m, v_m) - b_D(v_m)\right] + 4\left[\frac{1}{2}a(v_n, v_n) - b_D(v_n)\right] - 8J_D\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right) &= \\ = 4J_D(v_m) + 4J_D(v_n) - 8J_D\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right) &\leq \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_D\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right) &\geq \mu \quad \text{infimum} \\ -8J_D\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right) &\leq -8\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &\leq 4\left(\mu + \frac{1}{m}\right) + 4\left(\mu + \frac{1}{n}\right) - 8\mu = \frac{4}{m} + \frac{4}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \\ m_1 \|v_m - v_n\|_{2,1}^2 &\leq \frac{2}{n_0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \|v_m - v_n\|_{2,1}^2 \leq \frac{2}{m_1 n_0} < \varepsilon \rightarrow \text{Cauchyovská posloupnost.}$$

3. J_D je spojitý.

Důkaz: J_D je spojitý: $u \rightarrow v$, potom $J_D(u) \rightarrow J_D(v)$

$$\|u - v\|_{2,1} \rightarrow 0, \text{ potom } |J_D(u) - J_D(v)| \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
|J_D(u) - J_D(v)| &= \left| \frac{1}{2}a(u, u) - b_D(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + b_D(v) \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \frac{1}{2}|a(u, u) - a(v, v)| + |b_D(u) - b_D(v)| = \\
&= \frac{1}{2} \left| \left(\sqrt{a(u, u)} + \sqrt{a(v, v)} \right) \left(\sqrt{a(u, u)} - \sqrt{a(v, v)} \right) \right| + |b_D(u) - b_D(v)| \leq \dots
\end{aligned}$$

$$\sqrt{a(u, u)} = \|u\|_E \stackrel{\text{ekviv.norem}}{\leq} \sqrt{M} \|u\|_{2,1}$$

$$\sqrt{a(v, v)} = \|v\|_E \stackrel{\text{ekviv.norem}}{\leq} \sqrt{M} \|v\|_{2,1}$$

$$|b_D(u) - b_D(v)| = |b_D(u - v)|$$

$$\begin{aligned}
a(u - v, u - v) &\geq a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v) \stackrel{C.-S.}{\geq} a(u, u) + a(v, v) - 2\sqrt{a(u, u)}\sqrt{a(v, v)} = \\
&= (\sqrt{a(u, u)} - \sqrt{a(v, v)})^2 \\
\rightarrow \sqrt{a(u, u)} - \sqrt{a(v, v)} &\leq \sqrt{a(u - v, u - v)} \leq \sqrt{M} \|u - v\|_{2,1}
\end{aligned}$$

$$\dots \leq \frac{1}{2}M (\|u\|_{2,1} + \|v\|_{2,1}) \|u - v\|_{2,1} + B_D \|u - v\|_{2,1}$$

Pokud $\|u - v\|_{2,1} \rightarrow 0$ potom $|J_D(u) - J_D(v)| \rightarrow 0$

4. Prostor V není úplný $\rightarrow$ zúplnění $\rightarrow$ existence řešení.

Definice: Zúplněním prostoru $C(\Omega)$ v integrální normě $\|u\|_p = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |u(x)|^p dx}$ je prostor $L_p(\Omega)$

Definice: Zúplněním prostoru $C^1(\Omega)$ nebo $U(\Omega)$ v integrální normě $\|u\|_{2,1}$ je Sobolevův prostor $H^1(\Omega)$.

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : v' \in L_2(\Omega)\} \quad v' \text{ je zobecněná derivace}$$

Definice(zobecněná derivace): Zobecněná derivace $v' = w$ je funkce, pro kterou platí

$$\int_{\Omega} w \varphi dx = - \int_{\Omega} v \varphi' dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Poznámka: Zobecněná derivace je definována jako variační identita, ne bodově.

Definice(slabé řešení): Slabým řešením nazveme $u \in H_D^1(\Omega)$, resp. $w \in H_V^1$ takové, že $u = u_D + w$, kde $u_D \in H_D^1(\Omega)$ je předem zvolená funkce

$$a(w, v) = b_D(v) = b(v) - a(u_D, v) \quad \forall v \in H_V^1$$

Věta (Laxova-Milgramova): Pokud a je V -eliptická, omezená bilineární forma a b je omezený lineární funkcionál na H_V^1 potom existuje právě jedno slabé řešení. Navíc platí

$$\|u\|_{2,1} \leq \frac{1}{m} \|b\| \leq \frac{B}{m}, \quad \text{kde} \quad \|b\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|b(v)|}{\|v\|_{2,1}}.$$

Poznámka: V dovození byla předpokládána navíc symetrická forma. Tento požadavek není nutný a důkaz lze jednoduše provést pomocí Riezsovy věty o reprezentaci.

Regularita slabého řešení:

Lemma (du Bois Reymondovo): *Nechť $u \in L(\Omega)$ a platí*

$$\int_{\Omega} u \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Potom $u = 0$ skoro všude na Ω . Pokud navíc $u \in C(\Omega)$, potom $u = 0$ ve všech bodech Ω .

Poznámka: Pokud budou data úlohy hladší (lepší), bude řešení také hladší (tj. klasické)?

Slabé řešení: $u \in U_D$:

$$\int_0^l ku'v' \, dx = \int_0^l f v \, dx - \hat{\tau}v(l) \quad \forall v \in H_v(0, l)$$

použijeme jen testovací funkce nulové na hranici a předpoklad, že dodatečné derivace existují (dostatečně regulární řešení):

$$\int_0^l ((ku')' + f)v \, dx = 0$$

a platí, že $(ku')' + f = 0$ s.v. na $(0, l)$, pokud by byla funkce, $(ku')' + f$ spojitá, potom $(ku')' + f = 0$ bodově (všude na $(0, l)$), jde o klasické řešení.

Základy funkcionální analýzy:

Lineární prostor: Lineárním prostorem U nazveme libovolnou množinu (vektorů, funkcí) na které jsou definovány operace sčítání, násobení skalárem s následujícími vlastnostmi:

- $x + y = y + x, \forall x, y \in U,$
- $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in U,$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in U, \alpha \in \mathbb{R},$
- $\exists \mathbf{0}: x + \mathbf{0} = x, \forall x \in U,$
- $\forall x \exists (-x): x + (-x) = \mathbf{0},$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- $1.x = x, \forall x \in U,$
- $0.x = \mathbf{0}, \forall x \in U.$

Norma: Nezáporná funkce $\|x\|$ s následujícími vlastnostmi:

- $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in U,$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in U.$
- Lineární prostor U s definovanou normou $\|u\|$ je lineární normovaný prostor.
- $\|u\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |u(x)|,$
- $\|u\|_1 = \int_{\Omega} |u(x)| dx,$
- $\|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{1/p}, \|u\|_2 = \|u\|_{2,0} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{1/2},$
- $\|u\|_{2,1} = \left[\int_{\Omega} [u^2 + (u')^2] dx \right]^{1/2},$
- $\|u\|_a = \|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}.$
- Seminorma: $|u|_{2,1} = \left[\int_{\Omega} [(u')^2] dx \right]^{1/2},$ nespňuje $|u|_{2,1} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Skalární součin: Symetrická bilineární forma $(u, v) : U \times U \rightarrow \mathbb{R},$ po kterou platí

- $(u, u) \geq 0, (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0, \forall u \in U.$
- $\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$

Cauchy-Schwarzova nerovnost: $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$.

Ekvivalence norem: $\exists m > 0$ a $M > 0$, takové, že $\forall u \in U$ platí

$$\sqrt{m}\|u\|_{2,1} \leq \|u\|_a \leq \sqrt{M}\|u\|_{2,1}.$$

- Systém všech otevřených i uzavřených množin je v obou normách stejný.
- Každá posloupnost je zároveň konvergentní nebo divergentní v obou normách.
- Každá posloupnost je nebo není Cauchyovská v obou normách.

Cauchyovská posloupnost (Bolzanova-Cauchyova podmínka): (nutná podmínka konvergence)

Definice: Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ je $\|a_m - a_n\|_{2,1} < \varepsilon$

Lemma: Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.

Definice: Prostor X nazveme úplný, jestliže každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní.

2. Přednáška

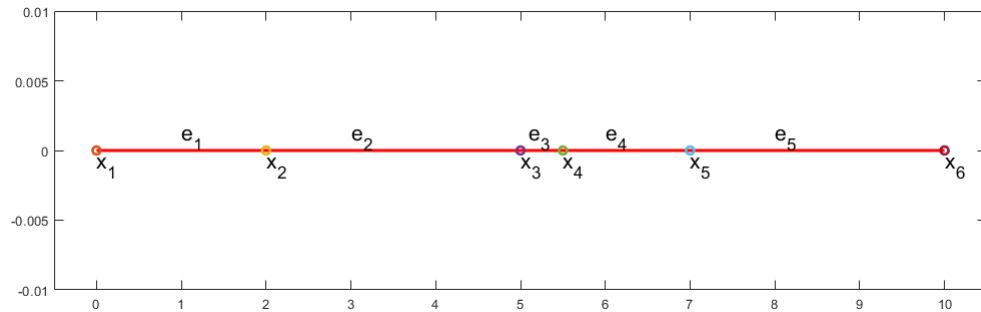
Obsah: Ritz-Galerkinova metoda + příklad.

Diskretizační chyba.

Apriorní a a posteriori odhady.

Metoda konečných prvků: Ritzova-Galerkinova metoda:

- Obecné dělení τ_h oblasti $\Omega = \langle 0, l \rangle$, $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ délky nejvýše h , tj. $|x_{i+1} - x_i| \leq h$.



- $U(\tau_h) = U_h$ množina spojitých funkcí na $\Omega = \langle 0, l \rangle$ a lineárních na každém z intervalů $e_i \in \tau_h$. $U_h \subset H^1$.
- U_h^D množina funkcí z U_h splňující Dirichletovu OP - množina přípustných funkcí. $U_h^D \subset H_D^1$.
- V_h množina funkcí z U_h které splňují homogenní Dirichletovu podmínku, množina testovacích funkcí. $V_h \subset H_V^1$.
- Bázové prvky prostoru $\phi(x) \in U_h$:

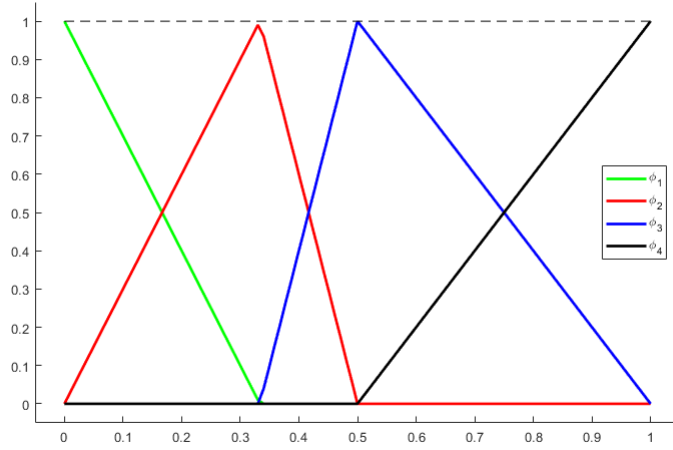
$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Například:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_1} & x \in \langle x_1, x_2 \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} & x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i} & x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$\phi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_{N-1}} & x \in \langle x_{N-1}, x_N \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$



- Každá funkce $u_h(x) \in U_h$ lze vyjádřit ve tvaru: $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$.
- $I = \{1, \dots, N\}$ množina indexů, $I_D = \{i : x_i \in \Gamma_D\}$, kde Γ_D hranice, kde je zadána Dirichletova okrajová podmínka, je množina indexů příslušných k Dirichletově OP, $I_V = I - I_D$.
- $\phi_D(x) = \sum_{k \in I_D} \hat{u}_k \phi_k(x)$, kde $\hat{u}_k$ je zadaná hodnota Dirichletovy OP v $x_k \in \Gamma_D$.
- Potom každou funkci $u_h(x) \in U_h^D$ lze vyjádřit ve tvaru $u_h(x) = \phi_D(x) + \sum_{i \in I_V} u_i \phi_i(x)$.
- Každou funkci $v_h \in V_h$ lze vyjádřit ve tvaru $v_h(x) = \sum_{i \in I_V} v_i \phi_i(x)$. Funkce ϕ_i , pro $i \in I_V$, jsou báze funkce prostoru V_h .

Mějme úlohu (a je bilineární, symetrická, V-eliptická)

$$\begin{aligned} u &\in H_D^1 \\ a(u, v) &= b(v), \quad \forall v \in H_V^1, \\ &\iff \\ u &\in H_D^1 \\ J(u) &= \min\{J(w) : w \in H_D^1\}. \end{aligned}$$

- $U_h = \text{span}\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$.
- Konečně-dimenzionální aproximace nekonečně-dimenzionálních prostorů:

$$U_h^D = \phi_D + \text{span}\{\phi_i, i \in I_V\} \subset H_D^1,$$

$$V_h = \text{span}\{\phi_i, i \in I_V\} \subset H_V^1,$$

- Přibližné řešení lze definovat jako řešení následující úlohy:

$$\left. \begin{aligned} u_h &\in U_h^D \\ a(u_h, v_h) &= b(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \right\} \text{ Galerkinova metoda}$$

$$\iff \left. \begin{aligned} u_h &\in U_h^D \\ J(u_h) &= \min\{J(w_h) : w_h \in U_h^D\}. \end{aligned} \right\} \text{ Ritzova metoda}$$

Galerkinova metoda: postupně za v_h volím postupně všechny báze funkce:

$$a(u_h, \phi_i) = b(\phi_i), \quad \forall i \in I_V,$$

$$a(\phi_D(x) + \sum_{j \in I_V} u_j \phi_j(x), \phi_i(x)) = b(\phi_i(x)), \quad \forall i \in I_V,$$

$$a(\phi_D, \phi_i) + \sum_{j \in I_V} u_j a(\phi_j, \phi_i) = b(\phi_i), \quad \forall i \in I_V,$$

$$\sum_{j \in I_V} u_j a(\phi_j, \phi_i) = b(\phi_i) - a(\phi_D, \phi_i) = b_D(\phi_i), \quad \forall i \in I_V,$$

$$Au = b.$$

Příklad:

Modelová úloha (naivní přístup):

$$\begin{aligned} -(ku')' &= f \quad x \in (0, l) \\ -ku'(l) &= \hat{\tau} \\ u(0) &= \hat{u}. \end{aligned}$$

Vstupní data: $l = 1$, $f = 1 - x$, $k = 1$, $\hat{\tau} = -\frac{1}{4}$, $\hat{u} = 2$.

$$a(u, v) = \int_0^l ku'v' dx = \int_0^1 u'v' dx,$$

$$b(v) = \int_0^l f v \, dx - \hat{\tau} v(l) = \int_0^1 (1-x) v \, dx - \frac{1}{4} v(l).$$

$$b_D(v) = \int_0^l f v \, dx - \hat{\tau} v(l) - \int_0^l k \tilde{u}' v' \, dx = \int_0^1 (1-x) v \, dx - \frac{1}{4} v(l) - \int_0^1 \tilde{u}' v' \, dx.$$

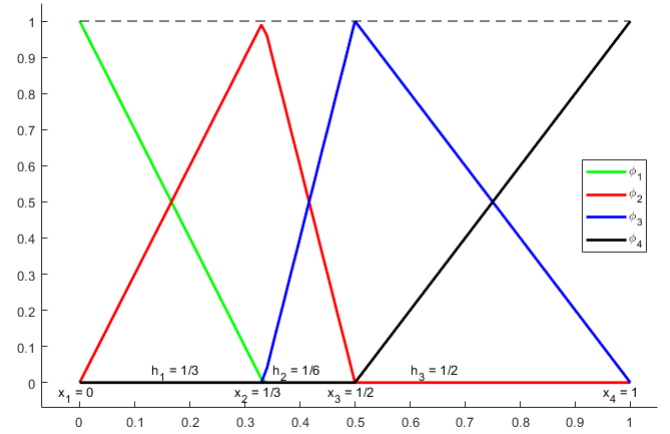
Volba diskretizace sítě a báze:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 3x, & x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle, \\ 3 - 6x, & x \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 6x - 2, & x \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle, \\ 2 - 2x, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

$$\phi_4(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$



Přibližné řešení hledám ve tvaru

$$u_h(x) = \underbrace{2\phi_1}_{\phi_D} + u_2\phi_2 + u_3\phi_3 + u_4\phi_4,$$

$$I_D = \{1\}, \quad I_V = \{2, 3, 4\}$$

$$a(u_h, \phi_2) = u_2 a(\phi_2, \phi_2) + u_3 a(\phi_3, \phi_2) + u_4 a(\phi_4, \phi_2)$$

$$a(u_h, \phi_3) = u_2 a(\phi_2, \phi_3) + u_3 a(\phi_3, \phi_3) + u_4 a(\phi_4, \phi_3)$$

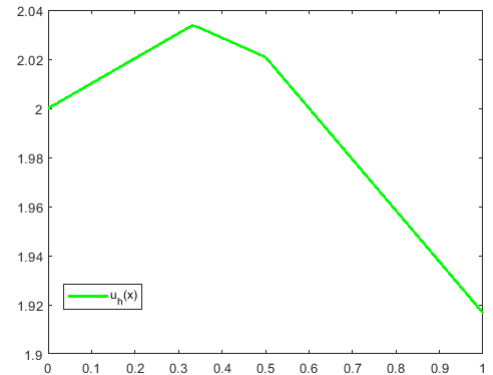
$$a(u_h, \phi_4) = u_2 a(\phi_2, \phi_4) + u_3 a(\phi_3, \phi_4) + u_4 a(\phi_4, \phi_4)$$

$$\begin{aligned}
a(\phi_2, \phi_2) &= \int_0^1 \phi'_2 \phi'_2 dx = \int_0^{1/3} 3 \cdot 3 dx + \int_{1/3}^{1/2} -6 \cdot (-6) dx = 9 \\
a(\phi_3, \phi_2) &= a(\phi_2, \phi_3) = \int_0^1 \phi'_2 \phi'_3 dx = \int_{1/3}^{1/2} -6 \cdot 6 dx = -6 \\
a(\phi_4, \phi_2) &= a(\phi_2, \phi_4) = 0 \\
a(\phi_3, \phi_3) &= \int_0^1 \phi'_3 \phi'_3 dx = \int_{1/3}^{1/2} 6 \cdot 6 dx + \int_{1/2}^1 -2 \cdot (-2) dx = 8 \\
a(\phi_4, \phi_3) &= a(\phi_3, \phi_4) = \int_0^1 \phi'_3 \phi'_4 dx = \int_{1/2}^1 -2 \cdot 2 dx = -2 \\
a(\phi_4, \phi_4) &= \int_0^1 \phi'_4 \phi'_4 dx = \int_{1/2}^1 2 \cdot 2 dx = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_D(\phi_2) &= \int_0^1 (1-x)\phi_2 dx + \frac{1}{4}\phi_2(1) - \int_0^1 2\phi'_1 \phi'_2 dx = \\
&= \int_0^{1/3} (1-x)3x dx + \int_{1/3}^{1/2} (1-x)(3-6x) dx + 0 + \int_0^{1/3} 2 \cdot (-3) \cdot 3 dx = \\
&= \frac{445}{72} \\
b_D(\phi_3) &= \int_0^1 (1-x)\phi_3 dx + \frac{1}{4}\phi_3(1) - \int_0^1 2\phi'_1 \phi'_3 dx = \\
&= \int_{1/3}^{1/2} (1-x)(6x-2) dx + \int_{1/2}^1 (1-x)(2x-2) dx + 0 + 0 = \frac{7}{54} \\
b_D(\phi_4) &= \int_0^1 (1-x)\phi_4 dx + \frac{1}{4}\phi_4(1) - \int_0^1 2\phi'_1 \phi'_4 dx = \\
&= \int_{1/2}^1 (1-x)(2x-1) dx + \frac{1}{4} + 0 = -\frac{5}{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{445}{72} \\ \frac{7}{54} \\ -\frac{5}{54} \end{bmatrix}.$$

$$u = [2.0340 \ 2.0208 \ 1.9167]^T$$



- Pokud je $a(u, v)$ symetrická pozitivní bilineární forma, potom matice A je symetrická pozitivně definitní.
- Řídkost matice A , třídiagonální matice A .

Algoritmizace MKP:

Diskretizace $\tau_h = \{e_1, \dots, e_{N-1}\}$, $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$.

1. Data pro popis úlohy: organizace dat po prvcích, pro každý element e_l :
 - $x_{(1)}, x_{(2)}$ souřadnice koncových bodů elementu,
 - r, s čísla koncových bodů,
 - k_l, f_l hodnoty materiálových dat a pravé strany pro element
 - Krajní body:
 - x - souřadnice krajů,
 - Typ podmínky: Dirichletova, Neumannova ...
 - r číslo bodů
 - $\hat{u}, \hat{\tau}$ zadaná hodnota OP
2. Sestavení soustavy po prvcích: Prvky matice A a pravé strany b jsou integrály, které lze počítat jako součet integrálů přes jednotlivé prvky:

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{N-1} \int_{e_l} k_l \phi'_i \phi'_j dx$$

$$b_i = \sum_{l=1}^{N-1} \int_{e_l} f_l \phi_i dx$$

Průběh báze funkce na elementu e_l může být pouze následujícího průběhu:

$$\phi_i|_{e_l} = \begin{cases} \psi'_{(1)}; & \psi'_{(1)} = -\frac{1}{h_l}, \\ \psi_{(2)}; & \psi'_{(1)} = \frac{1}{h_l}, \\ 0, \end{cases} \quad h_l = x_{(2)} - x_{(1)}$$

Nenulové příspěvky lze zapsat do lokální matice $A^{(l)}$ a vektoru $b^{(l)}$.

$$A^{(l)} = \frac{k_l}{h_l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^{(l)} = \frac{1}{2} f_l h_l \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Přičtení lokálních příspěvků do globální soustavy:

$$\begin{aligned}a_{rr} &= a_{rr} + a_{11}^{(l)}, \\a_{rs} &= a_{rs} + a_{12}^{(l)}, \\a_{sr} &= a_{sr} + a_{21}^{(l)}, \\a_{ss} &= a_{ss} + a_{22}^{(l)}, \\b_r &= b_r + b_1^{(l)}, \\b_s &= b_s + b_2^{(l)}.\end{aligned}$$

3. Úprava vzhledem k okrajovým podmínkám:

- Dirichletova podmínka v uzlu x_r :
k pravé straně se přidá vektor $(-a(\phi_D, \phi_1), \dots, -a(\phi_D, \phi_N))$, kde $\phi_D = \hat{u}\phi_r$, tj. r -tý sloupec matice A se přenásobí $\hat{u}$ a odečte od pravé strany. V případě homogenní Dirichletovy OP nedojde ke změně. Potom úprava prvního řádku a sloupce matice A (vynulování) a nastavení hodnot $u_{rr} = 1$, $b_r = \hat{u}$.
- Neumannova podmínka v uzlu x_r :
k položce b_r přidáme hodnotu $\hat{\tau}$.

Metoda konečných prvků: Diskretizační chyba:

- Nechť u je řešení okrajové úlohy, u_h je řešení Ritzovou-Galerkinovou metodou.
- Diskretizační chyba: $e_h = u - u_h$.
- $\|u - u_h\|_E = \sqrt{a(u - u_h, u - u_h)}$.
- $\|u - u_h\|_{2,1} = \left(\int_{\Omega} [u - u_h]^2 dx + \int_{\Omega} [u' - u'_h]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

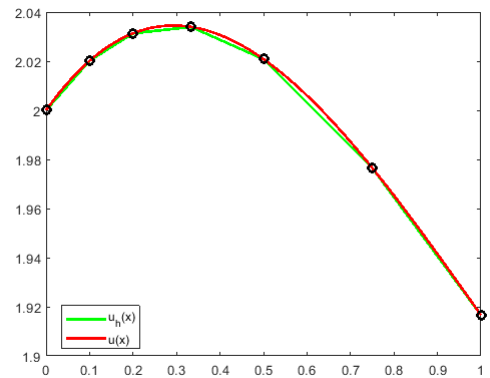
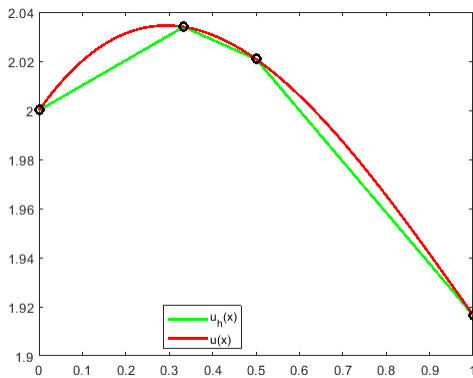
Céovo Lemma: Nechť okrajová úloha má V -eliptickou a omezenou (příp. symetrickou) bilineární formu $a(u, v)$, u je slabé řešení okrajové úlohy, u_h je řešení získané Ritzovou-Galerkinovou metodou, tj.

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} + u_0 \in H_D^1 : & a(u, v) &= b(v), \quad \forall v \in H_V^1, \\ u_h &= \tilde{u}_h + u_h^0 \in U_h^D : & a(u_h, v_h) &= b(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

potom platí

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E &\leq \|u - w\|_E \quad \forall w \in U_h^D, \\ \|u - u_h\|_{2,1} &\leq \frac{M}{m} \|u - w\|_{2,1} \quad \forall w \in U_h^D. \end{aligned}$$

- u_h je optimální aproximace řešení u na prostoru U_h^D měreno v energetické normě a kvazi-optimální (až na konstantu) měreno ve 2, 1 normě.



- Diskretizační chybu snížíme zjemněním dělení (intuitivně).
- Zjemnění nemusíme provádět tam, kde je průběh řešení lineární (pokud volíme lineární P1 prvky).
- Zjemnění musí být tam, kde očekáváme velké změny v řešení, nebo v derivaci.
- Porovnáním řešení na jemné a hrubé síti, můžeme získat představu o dalším postupu (zda je řešení již postačující, nebo dále zjemňovat).

- Pokud je řešení okrajové úlohy u spojité a $I_h u = u_I$ je lineární interpolace pro dané dělení τ_h , tj. $u_I(x_j) = u(x_j)$, kde u_j jsou uzly sítě, potom

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - I_h u\|_E, \quad \|u - u_h\|_{2,1} \leq \frac{M}{m} \|u - I_h u\|_{2,1}.$$

- Odhady bychom mohli získat z interpolace.

Věta: *Nechť $u \in H^2(\Omega)$ (vyšší regularita řešení), potom pro chybu interpolace $u_I = I_h u$ platí*

$$\|u - u_I\|_{L_2(\Omega)} \leq h^2 \|u''\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|u' - u'_I\|_{L_2(\Omega)} \leq h \|u''\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|u - u_I\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{h^2 + h^4} \|u''\|_{L_2(\Omega)}.$$

Věta: *Nechť $u \in H^1(\Omega)$, potom pro chybu interpolace $u_I = I_h u$ platí*

$$\|u - u_I\|_{L_2(\Omega)} \leq h \|u'\|_{L_2(\Omega)}.$$

Apriorní odhad chyby:

Kvalitativní posouzení aproximace (závisí na u'' , což neznáme), nepoužívají znalost vypočteného řešení.

Rychlost konvergence: pro $u \in H^2(\Omega)$

v H^1 normě

- Podle Céova lemmatu a odhadu chyby interpolace: pro $u \in H^2(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{2,1} \leq C \|u - u_I\|_{2,1} \leq C \sqrt{h^2 + h^4} \|u''\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|u - u_h\|_{2,1} \leq K h \|u''\|_{L_2(\Omega)} = K(u) h \quad \text{pro } h \leq h_0,$$

kde h je diskretizační parametr (délka nejdelší strany dělení τ_h) a $K(u)$ závisí pouze na přesném řešení, nikoliv na diskretizaci.

- Pro $h \rightarrow 0^+$ konverguje řešení u_h k přesnému řešení u a platí i pro derivace.
- Při volbě $\frac{h}{2}$ je zmenšení chyby o polovinu.
- Asymptotická rychlost konvergence.

v L_2 normě

- $\|u - u_h\|_{2,0} \leq Ch^2 \|u''\|_{2,0}$.
- Aproximace řešení je přesnější, než aproximace derivací (toků).

Celkově pro $u \in H^2(\Omega)$ platí:

$$\|u - u_h\|_{2,0} + h\|u - u_h\|_{2,1} \leq Kh^2 \|u''\|_{2,0}.$$

Rychlost konvergence: pro $u \in H^1(\Omega)$

Bez předpokladu vyšší regularity řešení lze ukázat, že aproximace u_h konverguje k přesnému řešení u v následujícím smyslu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h_\varepsilon > 0 \forall h < h_\varepsilon \text{ platí } \|u - u_h\|_{2,1} < \varepsilon.$$

- Mohu říci, že konverguje, ale nevím jak rychle.

Věta: *Nechť u je slabé řešení okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} -(ku')' &= f \text{ pro } \Omega = (0, l) \\ u(0) &= 0 \\ -k(l)u'(l) &= \hat{\tau}. \end{aligned}$$

Pokud u_h je řešení MKP s dělením τ_h s uzly x_j a lineárními konečnými prvky (P1 elementy) a předpokládáme, že k je konstantní na elementech, potom u_h je rovno lineární interpolaci přesného řešení $I_h u$ s uzly x_j .

- Výše uvedená věta je pro poměrně speciální bilineární formu a .
- Obecně platí, že existují body, ve kterých je MKP aproximace lepší, než v jiných bodech (vlastnost superkonvergence).

Aposteriorní odhad chyby:

Kvantitativní odhad normy chyby $\|e_h\|$. Mohou se zde objevit veličiny odvozené z výpočtu u_h .

- $\eta(h, u_h, f, \hat{\tau}, \hat{u})$ je aposteriorní odhad (estimátor), pokud $\|u - u_h\| \leq \eta$.
- Pokud $\eta = \sqrt{\sum_{T \in \tau_h} \eta_T^2}$, potom η_T jsou lokální indikátory diskretizační chyby.
- Lokální indikátory jsou základem adaptivního zjemňování sítě $\rightarrow$ zjemňují dělení těch elementů $T \in \tau_h$, pro která jsou η_T velká.
- Cílem je mít η_T přibližně stejné na všech $T \in \tau_h$.
- Celkový estimátor η je menší než zadané tolerance.

- Efektivita a spolehlivost: $C_e \eta \leq \|u - u_h\| \leq C_s \eta$ (chceme mít co nejmenší rozdíl $C_s - C_e$).
- Asymptotická přesnost: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta}{\|u - u_h\|} = 0$.
- Cena výpočtu indikátorů (pokud možno úměrná počtu neznámých).

Aposteriorní doplněk apriorního odhadu:

Pokud $u \in H^2(\Omega)$, potom $\|u - u_h\|_E \leq C\sqrt{h^2 + h^4}\|u''\|_{L_2(\Omega)}$.

Pro úlohu $-(ku')' = f$ a konstantu M z odhadu omezenosti bilineární formy a plyne

$$\|u - u_h\|_{2,1} \leq M\sqrt{(h_0^2 + h_0^4)}\|\frac{1}{k}f\|_{L_2(\Omega)},$$

kde $\eta = M\sqrt{(h_0^2 + h_0^4)}\|\frac{1}{k}f\|_{L_2(\Omega)}$ je estimátor a $\eta_T = M\sqrt{(h_0^2 + h_0^4)}\|\frac{1}{k}f\|_{L_2(T)}$ jsou lokální indikátory.

Problémem je předpoklad $u \in H^2(\Omega)$.

Residuální odhady:

Založeno na reziduální rovnici $a(u - u_h, v)$, kde u je řešení okrajové úlohy, $v \in V$:

$$a(e_h, e_h) = \|u - u_h\|_E^2 \leq c\eta_R.$$

Hierarchické odhady:

- Dvě řešení na dvou jemnostech sítě: u_h příslušné síti τ_h a $u_{h/2}$ příslušné k síti $\tau_{h/2}$. Síť $\tau_{h/2}$ vznikne dělením sítě τ_h , proto bude platit $V_h \subset V_{h/2}$.
- $\eta = \|u_{h/2} - u_h\| \sim \|u - u_h\|$: chceme použít rozdíl dvou řešení na dvou jemnostech sítě jako estimátor chyby.

•

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq \|u - u_{h/2}\| + \|u_{h/2} - u_h\|, \\ \|u - u_h\|_E^2 &\leq \|u - u_{h/2}\|_E^2 + \|u_{h/2} - u_h\|_E^2. \end{aligned}$$

- Saturační předpoklad:

$$\|u - u_{h/2}\| \leq \beta \|u - u_h\|, \quad \beta < 1,$$

$$\|u - u_{h/2}\|_E \leq \beta \|u - u_h\|_E, \quad \beta < 1.$$

- Potom platí

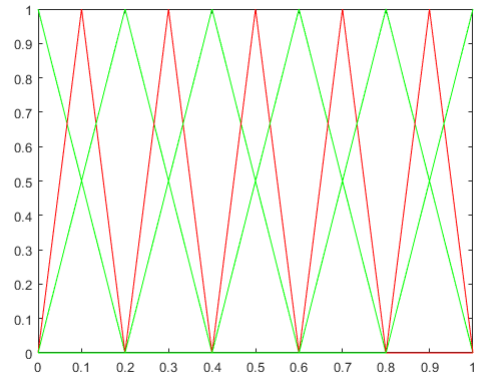
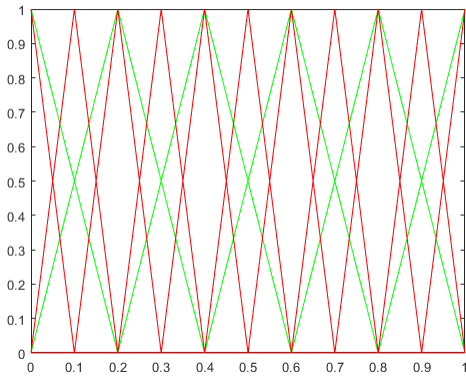
$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq \beta \|u - u_h\| + \|u_{h/2} - u_h\|, \\ \|u - u_h\| &\leq \frac{1}{1 - \beta} \|u_{h/2} - u_h\|, \\ \|u - u_h\|_E^2 &\leq \beta^2 \|u - u_h\|_E^2 + \|u_{h/2} - u_h\|_E^2, \\ \|u - u_h\|_E^2 &\leq \frac{1}{1 - \beta^2} \|u_{h/2} - u_h\|_E^2. \end{aligned}$$

- Dívá se na úlohu globálně, ne lokálně přes elementy $T \in \tau_h$.
- Náročný a často pomalý výpočet. K odhadu chyby potřebujeme nejen řešení na U_h , ale i $U_{h/2}$.
- Využití hierarchické báze:

$$\begin{aligned} U_h &= \text{span}\{\phi_1^h, \dots, \phi_n^h\}, \\ U_{h/2} &= \text{span}\{\phi_1^{h/2}, \dots, \phi_{2n-1}^{h/2}\} = \text{span}\{\phi_1^H, \dots, \phi_{2n-1}^H\}, \end{aligned}$$

kde ϕ^H je označení hierarchické báze a platí

$$\phi_k^H \begin{cases} \phi_i^h & k = 2i - 1, \quad x_k \in \tau_h, \\ \phi_i^{h/2} & k = 2i, \quad x_k \in \tau_{h/2}, \quad x_k \notin \tau_h. \end{cases}$$



- Odpovídá rozkladu $U_{h/2} = U_h \oplus V_{h/2}$, kde prostory $U_h \perp_a V_{h/2}$.
- Použití hierarchické báze vede na soustavu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{h,h} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{h/2,h/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_h \\ \mathbf{b}_{h/2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1^H, \phi_1^H) & a(\phi_2^H, \phi_1^H) & a(\phi_3^H, \phi_1^H) & a(\phi_4^H, \phi_1^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_1^H) \\ a(\phi_1^H, \phi_2^H) & a(\phi_2^H, \phi_2^H) & a(\phi_3^H, \phi_2^H) & a(\phi_4^H, \phi_2^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_2^H) \\ a(\phi_1^H, \phi_3^H) & a(\phi_2^H, \phi_3^H) & a(\phi_3^H, \phi_3^H) & a(\phi_4^H, \phi_3^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_3^H) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_2^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_3^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_4^H, \phi_{2n-1}^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_{2n-1}^H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(\phi_1^H) \\ b(\phi_2^H) \\ b(\phi_3^H) \\ \vdots \\ b(\phi_{2n-1}^H) \end{bmatrix}$$

Přehazování sloupců v matici $\rightarrow$ přehazování neznámých ve vektoru $\mathbf{u}$.

Všechny liché/sudé sloupce k sobě.

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1^H, \phi_1^H) & a(\phi_3^H, \phi_1^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_1^H) & a(\phi_4^H, \phi_1^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_1^H) \\ a(\phi_1^H, \phi_2^H) & a(\phi_3^H, \phi_2^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_2^H) & a(\phi_4^H, \phi_2^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_2^H) \\ a(\phi_1^H, \phi_3^H) & a(\phi_3^H, \phi_3^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_3^H) & a(\phi_4^H, \phi_3^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_3^H) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\phi_1^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_3^H, \phi_{2n-1}^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_4^H, \phi_{2n-1}^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_{2n-1}^H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(\phi_1^H) \\ b(\phi_2^H) \\ b(\phi_3^H) \\ \vdots \\ b(\phi_{2n-1}^H) \end{bmatrix}$$

Přehazování řádků v matici $\rightarrow$ přehazování ve vektoru pravé strany $\mathbf{b}$.

Všechny liché/sudé řádky k sobě.

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1^H, \phi_1^H) & a(\phi_3^H, \phi_1^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_1^H) & a(\phi_4^H, \phi_1^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_1^H) \\ a(\phi_1^H, \phi_3^H) & a(\phi_3^H, \phi_1^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_3^H) & a(\phi_4^H, \phi_3^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_3^H) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\phi_1^H, \phi_2^H) & a(\phi_3^H, \phi_2^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_2^H) & a(\phi_4^H, \phi_2^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_2^H) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\phi_1^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_3^H, \phi_{2n-1}^H) & \dots & a(\phi_2^H, \phi_{2n-1}^H) & a(\phi_4^H, \phi_{2n-1}^H) & \dots & a(\phi_{2n-1}^H, \phi_{2n-1}^H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(\phi_1^H) \\ b(\phi_3^H) \\ \vdots \\ b(\phi_2^H) \\ \vdots \\ b(\phi_{2n-1}^H) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{h,h} & \mathbf{A}_{h/2,h} \\ \mathbf{A}_{h,h/2} & \mathbf{A}_{h/2,h/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_h \\ \mathbf{b}_{h/2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

- $u_{h/2} = u_h + v_{h/2}$, $\eta = ||v_{h/2}||$.
- Nemusí být splněna saturační vlastnost.

Odhad pomocí zhlazené (zprůměrované) derivace:

- Postprocessing.
- Založené na úpravě vypočteného řešení pomocí průměrovacích technik, aby bylo řešení hladší a tedy lépe aproximovalo řešení.

•

$$\eta_S^2 = \int_{\Omega} (g_h - u'_h)^2 dx \sim \int_{\Omega} (u' - u'_h)^2 dx = ||u - u_h||_E^2.$$

- Chci aby g_h je aproximace derivace řešení, která je ‘lepší’ než u'_h , ale ne novým výpočtem.

•

$$g_h(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}[u'_h(x_i^+) + u'_h(x_i^-)], & i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{2}[u'_h(x_0^+) + u'_h(x_1^+)], & i = 0, \\ \frac{1}{2}[u'_h(x_n^-) + u'_h(x_{n-1}^-)], & i = n. \end{cases}$$

3. Přednáška

Vícerozměrné modely:

- Uvažujme funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ definované na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- Množinu Ω nazveme oblastí, pokud je otevřená a souvislá (bez 'děr', nejsou oddělené části).
- $\partial\Omega$ označíme hranici oblasti Ω ,
- $\bar{\Omega}$ označíme uzávěr oblasti, tj. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.
- Předpokládáme, že pro $x \in \partial\Omega$ existuje jednotkový vektor vnější normály. Míra množiny v nichž normála neexistuje je nulová (Oblast třídy C^1).
- Lokálně se oblast rozkládá vždy na jedné straně hranice.
- $\rightarrow$ Oblasti s lipschitzovskou hranicí, regulární oblasti.

Úloha vedení tepla:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) &= f & \text{v } \Omega \\ u &= \hat{u} & \text{na } \Gamma_D \\ K \operatorname{grad} u \cdot n &= \hat{\tau} & \text{na } \Gamma_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nabla(K \nabla u) &= f & \text{v } \Omega \\ u &= \hat{u} & \text{na } \Gamma_D \\ K \nabla u \cdot n &= \hat{\tau} & \text{na } \Gamma_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= f & \text{v } \Omega \\ u &= \hat{u} & \text{na } \Gamma_D \\ \sum_{i=1}^d K \frac{\partial}{\partial x_j} n_i &= \hat{\tau} & \text{na } \Gamma_N \end{aligned}$$

kde Γ_D je část hranice $\partial\Omega$ s předepsanou Dirichletovou podmínkou a Γ_N je část hranice $\partial\Omega$ s předepsanou Neumannovou podmínkou. Dále platí $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega - M_1$ a $\Gamma_D \cap \Gamma_N = M_2$, kde množiny M_1 a M_2 jsou množiny míry nula.

$\operatorname{grad} u \cdot \vec{n} = \nabla u \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ je derivace ve směru jednotkové normály.

Nespojitosti v pravé straně nebo v koeficientech lze opět řešit podmínkami přechodu.

Problematika oblastí: Mějme úlohu (poissonovu rovnici)

$$\begin{aligned} \Delta u &= -2 & \text{v } \Omega \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$.

- $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, potom lze nalézt řešení $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$. Řešení má spojité derivace 2. řádu $u \in C^2(\bar{\Omega})$.
- $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, úloha nemá jednoduché analytické řešení a není $u \in C^2(\bar{\Omega})$.
- Oblast tvaru L (nekonvexní) je ještě komplikovanější.
- Hladkost řešení je ovlivněna hladkostí oblasti.

Slabá formulace:

Hledáme $u \in U_D : a(u, v) = b(v), \forall v \in V$, kde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega,$$

$$b(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} v \, ds,$$

$U_D = \{u \in H^1(\Omega) : u = \hat{u} \text{ (ve smyslu stop) na } \Gamma_D\}$, Γ_D má kladnou míru,

$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ (ve smyslu stop) na } \Gamma_N\}$.

Důkaz:

$$u \in U_D : \quad - \int_{\Omega} \nabla(K \nabla u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V$$

Gaussova-Ostrogradského věta:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{a} b \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla(\vec{a} b) \, dx = \int_{\Omega} \vec{a} \cdot \nabla b \, dx + \int_{\Omega} b \nabla \vec{a} \, dx$$

$$\int_{\partial\Omega} K \nabla u v \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \nabla(K \nabla u) \, dx$$

$$- \int_{\Omega} v \nabla(K \nabla u) \, dx = \int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} K \nabla u v \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} K \nabla u v \cdot \vec{n} \, dS, \quad \forall v \in V$$

$$u \in U_D : \quad \underbrace{\int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} v \, ds}_{b(v)}, \quad \forall v \in V$$

Věta (Sobolevova věta o vnoření): *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d, k > \frac{d}{2}$. Potom*

a) existuje vnoření $H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, tj.

$$\forall u \in H^k(\Omega) \exists \tilde{u} \in C(\bar{\Omega}) : \quad u = \tilde{u} \text{ s.v.}$$

b) vnoření je spojitě, tj. existuje konstanta c tak, že

$$\|u\|_\infty \leq \|\tilde{u}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c\|u\|_{2,k}, \quad \forall u \in H^k(\Omega)$$

Poznámky:

1. $\Omega = (0, l) \subset \mathbb{R}^1$, $k > \frac{1}{2}$, potom $H^1(0, l) \subset C(\langle 0, l \rangle)$, tj. v 1D jsou funkce ze sobolevova prostoru s jednou zobecněnou derivací spojitě i na hranicích,
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $k > \frac{2}{2} = 1$, potom $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, tj. ve 2D nemusí být funkce z H^1 spojitě.
 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $k > \frac{3}{2}$, potom $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, tj. ve 3D nemusí být funkce z H^1 spojitě.

→ problém s interpolacemi (bodovými), nelze pracovat s bodovými hodnotami u , jak chápat hodnoty na hranici (Dirichletova podmínka).

Věta (O stopách): Existuje právě jeden spojitý lineární operátor $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ takový, že

a) stopa funkce γv je restrikcí na hranici v případě funkce spojitě až do hranice,

$$\gamma v = v|_{\partial\Omega}, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega})$$

b) stopa funkce $\gamma v \in L^2(\partial\Omega)$, existuje konstanta C tak, že

$$\|\gamma v\|_{2,0,\partial\Omega} \leq C\|v\|_{2,1,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

c) Existuje konstanta C tak, že

$$\|\gamma v\|_{2,0,\partial\Omega} \leq C\sqrt{\|v\|_{2,0,\Omega}}\sqrt{\|v\|_{2,1,\Omega}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Vlastnosti:

- Bilineární forma $a(u, v)$ je omezená

$$|a(u, v)| \leq k_1\|u\|_{2,1} \cdot \|v\|_{2,1}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

- Bilineární forma $a(u, v)$ je V-eliptická: pro $v \in V$ platí

$$|a(v, v)| \geq k_0 c \|v\|_{2,1}^2.$$

- Nechť $f \in L_2(\Omega)$, pak b je omezený funkcionál, pokud pro $v \in H^1(\Omega)$ platí

$$|b(v)| \leq B\|v\|_{2,1}.$$

- Existence: Lax-Milgramova věta (nevyžaduje symetrii bilineární formy $a(u, v)$).

- Existence: Pokud $\Gamma_D = \emptyset$ (pouze Neumannova podmínka), lze existenci zajistit, jen pokud platí

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} \, ds = 0,$$

tj. nulová bilance zdrojů.

Věta (regularita řešení): Řešení (modelové) úlohy patří do $H^2(\Omega)$ pokud k je konstantní nebo spojitě diferencovatelná na Ω , úloha má jenom Dirichletovy nebo Neumannovy okrajové podmínky, oblast Ω je hladká nebo je Ω konvexní mnohoúhelník či mnohostěn.

Poznámka: Interpolace je za předpokladu $u \in H^2$, tj. pracuji se spojitými funkcemi.

MKP pro vícerozměrné úlohy:

- Konstrukce prostoru $U_h \subset H^1(\Omega)$ a jeho částí U_h^D a V_h .
- Lineární trojúhelníkové prvky. τ_h triangulace oblasti, tak aby různé trojúhelníkové elementy měly společnou buď stranu nebo vrchol, nebo jsou disjunktní. Nutnost omezit úhly (abychom nezískali dlouhé uzoučké elementy).
- N_h je množina uzlů, T_i je i -tý element (trojúhelník).
- U obecné oblasti můžeme pomocí trojúhelníků (nebo jiných útvarů) oblast jen aproximovat.
- Prostor U_h definujeme volbou uzlové báze $\{\phi_i\}_{i=1}^n$:

$$\phi_i(x^j) = \delta_{ij}, \quad \phi_i|_T \in P_1 \quad \forall T \in \tau_h.$$

Vstupní data:

- Vstupní data pro uzly: souřadnice uzlů, rozlišení vnitřních a hraničních, rozlišení uzlů pro odpovídající zadané okrajové podmínky.
- Vstupní data pro elementy: identita lokálních uzlů s globálním číslováním, koeficienty a hodnoty pravé strany $f(x_T)$ pro daný element v těžišti x_T .
- Vstupní data pro okrajové podmínky: uzly pro Dirichletovu OP a hodnotu DOP, strany pro Neumannovu OP a hodnoty NOP.

Matice lineárního elementu:

- Courantův element (lineární trojúhelník).
- Příspěvky a_{ij} :

$$a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_{\Omega} (K \operatorname{grad}(\phi_j), \operatorname{grad}(\phi_i)) dx,$$

Příspěvky elementu T_k získáme uvažováním restrikce báze funkce ϕ_i na T_k :

$$\phi_i|_{T_k} = \begin{cases} 0 & \text{pro vrcholy mimo element } T_k \\ \psi_j & \text{pro vrcholy v elementu } T_k \end{cases}$$

- Lokální matice

$$A_T = \int_T B^T K B dx, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

- Úprava globální matice A .

Vektor pravé strany:

•

$$b_i = \sum_T \left\{ \int_T f \phi_i dx + \sum_{s(T) \subset \Gamma_{N_s(T)}} \int \hat{\tau} \phi_i ds \right\}$$

- Příspěvek pravé strany na elementu T_k :

$$b_i^k = \int_{T_k} f \psi_i dx.$$

- Zohlednění okrajových podmínek.

Získáme úlohu $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, v_h) = b(v_h) - a(\hat{u}_h^D, v_h) = b_D(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Hledáme $u \in U_D : a(u, v) = b(v), \forall v \in V$.

Hledáme MKP řešení $u_h \in U_h^D : a(u_h, v_h) = b(v_h), \forall v_h \in V_h$, které získáme Galerkinovou metodou (uvažujeme přesnou integraci).

Céovo Lemma: *Nechť okrajová úloha má V eliptickou a omezenou bilineární formu a , u je slabé řešení okrajové úlohy, u_h je řešení získané Ritzovou-Galerkinovou metodou, tj.*

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} + u_0 \in U_D : & a(u, v) &= b(v), \quad \forall v \in V, \\ u_h &= \tilde{u}_h + u_h^0 \in U_h^D : & a(u_h, v_h) &= b(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

potom platí

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E &\leq \|u - w\|_E \quad \forall w \in U_h^D, \\ \|u - u_h\|_{2,1} &\leq \frac{M}{m} \|u - w\|_{2,1} \quad \forall w \in U_h^D. \end{aligned}$$

Lemma: *Libovolný nedegerovaný trojúhelník (simplex) $T \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^d)$ je obrazem referenčního trojúhelníku (simplexu) $\hat{T}$, což je dáno afinní regulární transformací $F_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F_T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$) tvaru*

$$\hat{x} \mapsto F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T$$

s regulární maticí $B_T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}(\mathbb{R}^{d \times d})$ a vektorem $b_T \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^d)$.

Afinní transformace je regulární, pokud je regulární matice B_T .

Apriorní odhady:

- Céovo lemma + chyba interpolace.
- Variační přestupky:
 - $\Omega_h \neq \Omega$: oblast lze pouze aproximovat (křivočaré hranice), pro přesnou aproximaci volit izoparametrické prvky.
 - $f_h \neq f$, použití numerické integrace, lze interpretovat, jako přesné řešení s jinou pravou stranou.
 - $\hat{\tau}_h \neq \hat{\tau}$, použití numerické integrace, lze interpretovat, jako přesné řešení s jinou Neumannovou okrajovou podmínkou.
 - $\hat{u}_h \neq \hat{u}$ aproximujeme $\hat{u}$.

Pro $u \in H^2(\Omega)$:

$$\|u - u_h\|_{2,0} + h\|u - u_h\|_{2,1} \leq ch^2|u|_{2,2} \quad \text{pro } u \in H^2(\Omega).$$

Pro $u \in H^1(\Omega)$: Dokážeme pouze konvergenci $\|u - u_h\|_{2,0} \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$.

Aposteriorní odhady:

- residuální odhady:

$$\|u - u_h\|_E = \sup_{w \neq 0} \frac{a(u - u_h, w)}{\|w\|_E} \leq \eta,$$

$$\eta = \left(\sum_{T \in \tau_h} \eta_T^2 \right)^{1/2} \quad \eta_T = (h_T^2 \|R_T\|_{2,0,T}^2 + h_T \|r_t\|_{2,0,\partial T}^2)^{1/2},$$

$$R_T = \left(\sum_{ij} k_{ij} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j} + f \right)_T \quad T \in \tau_h,$$

$$r_t = \left(\hat{\tau} - k \frac{\partial u_h}{\partial n} \right)_t \quad \text{pro } t \in \Gamma_N,$$

$$r_t = \left(k \frac{\partial u_h}{\partial n} \right)_t \quad \text{pro } t \notin \Gamma_N,$$

- Hierarchické odhady:

Dvě řešení na dvou jemnostech sítě: u_h příslušné síti τ_h a $u_{h/2}$ příslušné k síti $\tau_{h/2}$. Síť $\tau_{h/2}$ vznikne dělím sítě τ_h , proto bude platit $V_h \subset V_{h/2}$.

$\eta = \|u_{h/2} - u_h\| \sim \|u - u_h\|$: chceme použít rozdíl dvou řešení na dvou jemnostech sítě jako estimátor chyby.

Saturační předpoklad: (nemusí platit)

$$\|u - u_{h/2}\| \leq \beta \|u - u_h\|, \quad \beta < 1,$$

$$\|u - u_{h/2}\|_E \leq \beta \|u - u_h\|_E, \quad \beta < 1.$$

Použití hierarchické báze vede na soustavu (není diagonální)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{h,h} & \mathbf{A}_{h,h/2} \\ \mathbf{A}_{h/2,h} & \mathbf{A}_{h/2,h/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_h \\ \mathbf{b}_{h/2} \end{bmatrix}.$$

$$u_{h/2} = u_h + w_{h/2}, \quad \eta = \|w_{h/2}\|_E.$$

- Zhlazené derivace:

Postprocessing.

$$\eta_S^2 = \int_{\Omega} (g_h - \nabla u_h)^2 dx \sim \int_{\Omega} K(\nabla u - \nabla u_h)(g_h - \nabla u_h) dx = \|u - u_h\|_E^2.$$