3

Lineární systémy

Miloš Schlegel

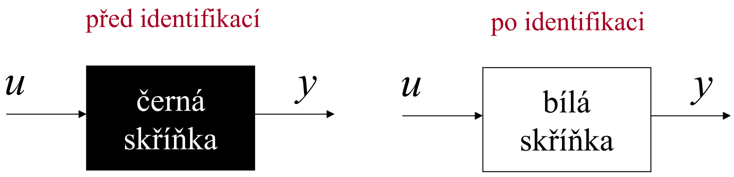
schlegel@kky.zcu.cz

Pojem černé skříňky

Předpoklady:

1. Vstup u a výstup y jsou reálná funkce reálné proměnné t.
2. Výstup $y(t)$ je jednoznačně určen průběhem funkce $u(t)$ na intervalu $(-\infty, t]$, neboli $y = Lu$ (jde o kauzální systém).
3. Pozorovatel nemá žádnou apriorní informaci o vnitřku černé skříňky, může však experimentovat se vstupem a sledovat výstup.
4. Na počátku experimentu $(t = 0)$ je černá skříňka v klidu, jinými slovy $u(t) = konst$ na intervalu $(-\infty, 0]$.

Problém identifikace systému



Problém identifikace systému spočívá v odhalení mechanismu (operátoru L), který transformuje vstup

$$u(\tau), \quad \tau \in (-\infty, t]$$

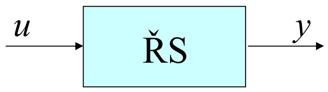
na výstup

$$y(\tau), \quad \tau \in (-\infty, t].$$

Cíl identifikace je tedy nalézt matematický popis chování systému obvykle za účelem jeho řízení.

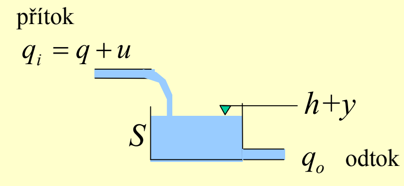
Vlastnosti řízených soustav

Pro potřeby teorie dělíme řízené systémy na ...



- Deterministické / stochastické systémy
- Lineární / nelineární systémy
- Stacionární (t-invariantní) / nestacionární systémy

Příklad: regulace hladiny v nádrži



Rovnovážný stav: $u = 0, \; y = 0$

$S\ [m^2]$	průřez nádrže
$q\ [m^3/s]$	konstantní přítok
$u\ [m^3/s]$	regulovatelný přítok
$h\ [m]$	hladina při $u = 0$
$y\ [m]$	odchylka hladiny od h způsobená regulovatelnou složkou přítoku u
χ	výtokový koeficient

Nelineární popis:

$$dy = \frac{(q_i - q_o)dt}{S}$$

$$\dot{y} = \frac{(q_i - q_o)}{S}$$

$$q_o = \chi\sqrt{2(h+y)g}$$

Linearizovaný model:

$$T\dot{y} + y = K_0 u$$

$$c = \chi \frac{g}{\sqrt{2hg}}$$

$$T = \frac{S}{c}, \quad K_0 = \frac{1}{c}$$

$$\dot{x} = ax + bu$$

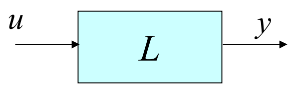
$$y = x$$

$$a = -\frac{1}{T}, \quad b = \frac{K_0}{T} = \frac{1}{S}$$

Výsledný model představuje lineární systém 1.řádu!

Lineární stacionární systémy

V praxi použitelná teorie existuje pouze pro lineární stacionární systémy ...

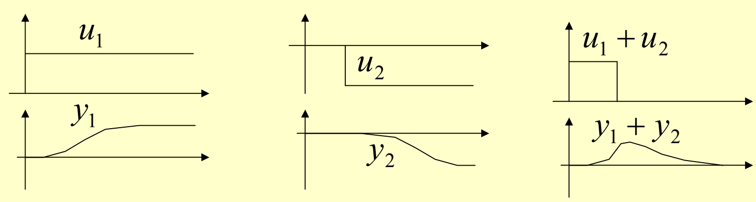


$$y(.) = L[u(.)]$$

linearita (princip superpozice)

$$\forall u_1, u_2; \forall \alpha_1, \alpha_2 :$$

$$L[\alpha_1 u_1(.) + \alpha_2 u_2(.)] = \alpha_1 L[u_1(.)] + \alpha_2 L[u_2(.)]$$



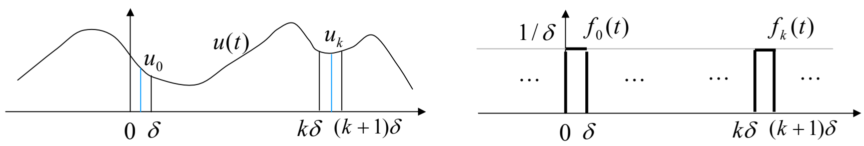
Důsledky principu superpozice

Věta: Relace vstup-výstup libovolného spojitého lineárního stacionárního systému lze vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

kde $h(t)$ je tzv. váhová (neboli impulsní) funkce systému.

Důkaz:



$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i(t)\delta = 1, \qquad u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i f_i(t)\delta$$

$$y(t) = L \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i f_i(t)\delta = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i L\big(f_i(t)\big)\delta = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i \bar{h}(t-i\delta)\delta$$

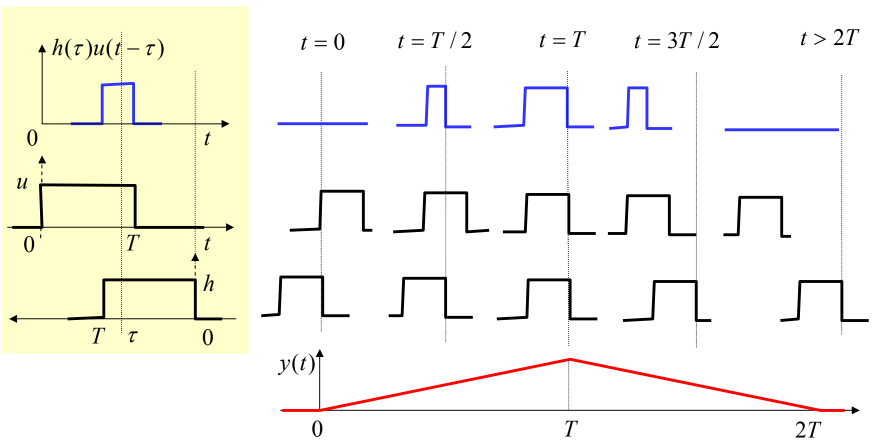
$\Rightarrow$ Limitním přechodem $\delta \to 0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Konvoluce funkcí

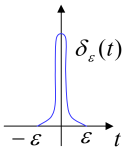
Výstup lineárního stacionárního systému je dán konvolucí vstupní funkce a váhové funkce systému ...

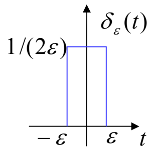
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \equiv h * u$$



Diracův puls

Diracův puls je zobecněná funkce (distribuce) ...





$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-\tau) f(\tau) d\tau = f^{(n)}(t) \qquad (*)$$

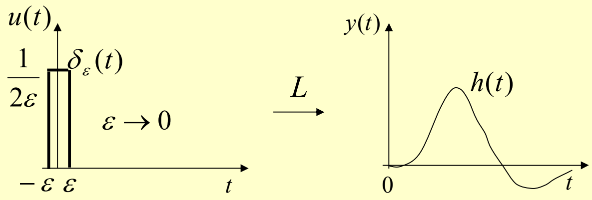
Důkaz vztahu (*):

$$\frac{1}{h}\left[f(t+h) - f(t)\right] = \frac{1}{h}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+h-\tau) f(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\left[\delta(t+h-\tau) - \delta(t-\tau)\right] f(\tau) d\tau \quad \to_{h\to 0} \quad f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Impulsní charakteristika

Impulsní charakteristika je odezva systému na Diracův puls ...



Diracův puls

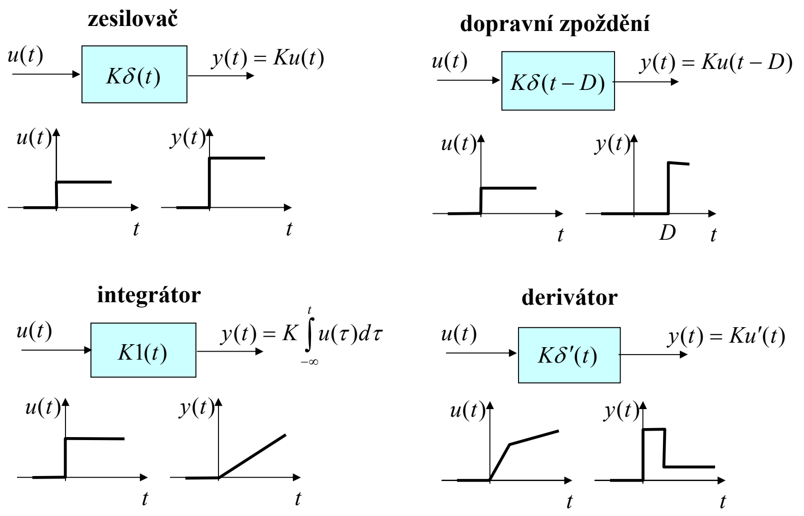
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

Impulsní charakteristika

$$h(t) = L[\delta(t)]$$

Problémy: impulsní charakteristika nelze přímo přesně odměřit neboť Diracův puls má nekonečnou amplitudu.

Systémy s jednoduchými impulsními charakteristikami



Uvnitř bloku je vždy uvedena příslušná váhová funkce.

Impulsní charakteristika systému 1.řádu

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

$$y = x$$

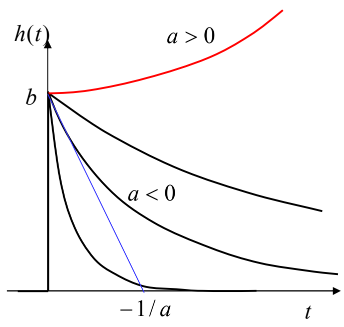
$$u(t) = \delta(t), \quad x_0 = 0$$

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \qquad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = e^{at}b$$

$$h(t) = y(t) = e^{at}b$$



Skutečnost, že (2) je řešení diferenciální rovnice (1) plyne z následujícího vztahu :

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)$$

$$e^{-at}\left(\dot{x}(t) - ax(t)\right) = d/dt\left(e^{-at}x(t)\right) = e^{-at}bu(t) \quad \Rightarrow \quad e^{-at}x(t) = \int e^{-at}bu(t)dt + C$$

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

*Vlastnosti lineárního systému a impulsní charakteristika

D1: Systém je kauzání, jestliže $h(t) = 0$ pro $t < 0$.

V1: Je-li systém kauzální, potom jeho relace vstup-výstup je dána vztahem

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty h(\tau - t)u(\tau)d\tau.$$

D2: Systém je stabilní ve smyslu „omezený vstup-omezený výstup“, jestliže odezva systému na libovolný omezený vstup je omezená. Jinými slovy, jestliže

$$\forall t,\ \exists M_u < \infty : |u(t)| < M_u \Rightarrow \forall t,\ \exists M_y < \infty : |y(t)| < M_y.$$

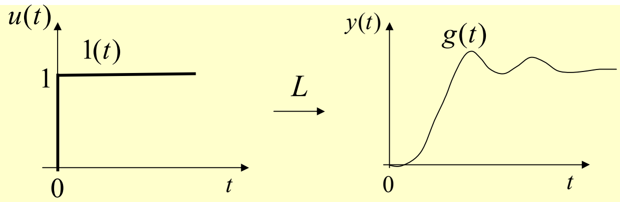
V2: Systém je stabilní ve smyslu „omezený vstup-omezený výstup“ právě tehdy, jestliže

$$\int_0^\infty |h(t)| d\tau < \infty.$$

(Dokažte!)

Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika je odezva systému na jednotkový skok.
Stejně jako impulsní charakteristika plně popisuje lineární systém …



Jednotkový skok

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

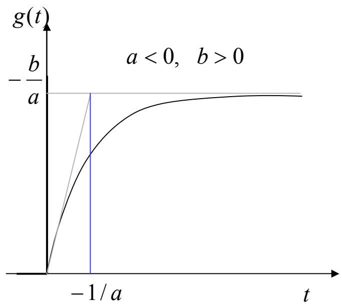
Přechodová charakteristika

$$g(t) = L\,1(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

Problémy: Přechodovou charakteristiku lze na systému přímo odměřit. Problémy však spočívají v zajištění ustáleného stavu, nelinearitě systému, poruchách, a často velké časové náročnosti.

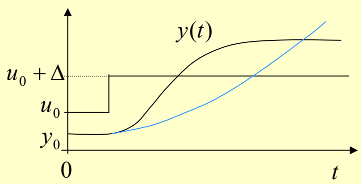
Přechodová charakteristika systému 1.řádu

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = x$$
$$u(t) = 1(t), \quad x_0 = 0$$
$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b 1(\tau) d\tau$$
$$x(t) = -\frac{1}{a} e^{a(t-\tau)} b \Big|_0^t = -a^{-1}(1 - e^{at})b$$
$$g(t) = y(t) = -a^{-1}(1 - e^{at})b$$



Postup měření přechodové charakteristiky

1. Vyčkáme ustáleného stavu.
2. Skokově změníme vstup systému.
3. Zaznamenáme odezvu systému.
4. Přechodovou charakteristiku vypočteme podle vztahu (*).
5. Měření případně opakujeme v dalších pracovních bodech. Při působení poruch je nutné výsledky průměrovat.



$$g(t) = (y(t) - y_0)/\Delta \qquad (*)$$

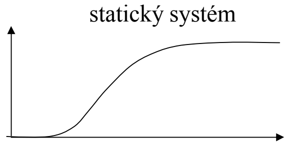
*Vlastnosti lineárního systému a přechodová charakteristika

D1: Systém je statický (typu 0), jestliže $\lim\limits_{t\to\infty}|g(t)| < \infty$.

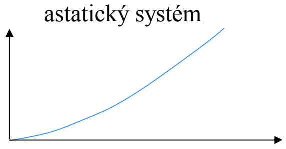
D2: Systém je astatický řádu k (typu k), jestliže $0 < \lim\limits_{t\to\infty}|g(t)|/t^k < \infty$.

D2: Systém je ryze dynamický, jestliže $g(0) = 0$.

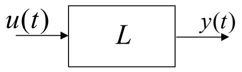
statický systém



astatický systém



Frekvenční přenos



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$u(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)$$

$$L(e^{j\omega_0 t}) = e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)$$

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau$$

$$L(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = L\big(2\cos(\omega t)\big) =$$
$$= H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t} =$$
$$= 2|H(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = arctg\frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)}$$

$$\Downarrow$$

$$L\big(\cos(\omega t)\big) = |H(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi)$$

Odezva lineárního systému na harmonický signál v ustáleném stavuje opět harmonický signál.

Definice: Komplexní funkci $H(j\omega)$ nazýváme frekvenčním přenosem systému. Frekvenční přenos $H(j\omega)$ je **Fourierovou transformací** váhové funkce $h(t)$ systému.

* Důkaz vztahu $L(\cos(\omega t)) = |H(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi)$

Vyjdeme ze vztahu (viz předchozí stránka)

$$L(2\cos(\omega t)) = H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}.$$

Označme

$$H(j\omega) = a + jb,$$

potom

$$L(2\cos(\omega t)) = (a + jb)(\cos\omega t + j\sin\omega t) + (a - jb)(\cos\omega t - j\sin\omega t) =$$
$$= (a\cos\omega t - b\sin\omega t) + j(a\sin\omega t + b\cos\omega t) +$$
$$+ (a\cos\omega t - b\sin\omega t) - j(a\sin\omega t + b\cos\omega t) =$$
$$= 2(a\cos\omega t - b\sin\omega t).$$

Dále platí

$$a\cos\omega t - b\sin\omega t = c\cos(\omega t + \varphi) = c\cos\omega t\cos\varphi - c\sin\omega t\sin\varphi.$$

Odtud

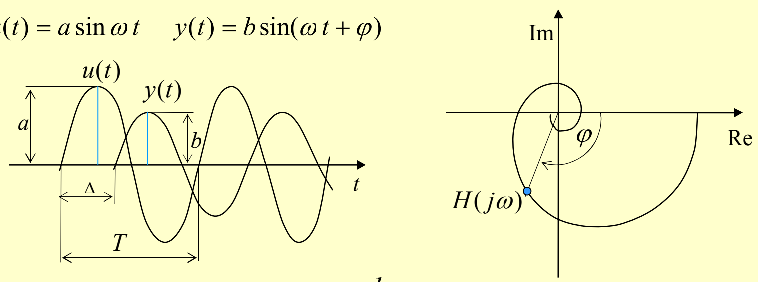
$$\begin{aligned} a &= c\cos\varphi \\ b &= c\sin\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} = |H(j\omega)| \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)} \end{aligned}$$

Dokončení důkazu je nyní jednoduché.

Frekvenční charakteristika

Odezva lineárního systému na sinusový vstup je v ustáleném stavu opět sinusový signál ...

$u(t) = a\sin\omega t \qquad y(t) = b\sin(\omega t + \varphi)$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \varphi = 2\pi\frac{\Delta}{T} \qquad H(j\omega) = \frac{b}{a}e^{-j\varphi}$$

Problémy: Odměření frekvenční charakteristiky je časově náročné.

Laplaceova transformace

Fourierova transformace (komplexní funkce reálné proměnné)

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

existuje (definiční integrál konverguje) pouze pro stabilní systémy ($\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$).

Například pro $h(t) = 1(t)$ (integrátor) platí

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}d\tau = \int_{0}^{\infty} \cos\omega t\, dt - j\int_{0}^{\infty} \sin\omega t\, dt$$

a oba integrály na pravé straně zřejmě divergují. Problém odstraníme tak, že „nepatrně“ zmodifikujeme váhovou funkci $1(t)$. Nahradíme ji funkcí

$$h_\sigma(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\sigma\to 0} h_\sigma(t) = 1(t),$$

Nyní obdržíme

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\sigma(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

za předpokladu $\sigma > 0$.

Laplaceova transformace (pokr.1)

Ze stejného důvodu definujeme jednostrannou **Laplaceovu transformaci** (komplexní funkci komplexní proměnné) vztahem

$$H(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)e^{-st}dt = \mathrm{L}\{h(t)\}.$$

kde $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 0$ je dostatečně velké, aby definiční integrál existoval.

D: Laplaceova transformace váhové funkce se nazývá přenos systému.

systém	popis	váhová funkce	přenos
zesilovač	$y(t) = Ku(t)$	$h(t) = K\delta(t)$	K
integrátor	$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$	$h(t) = 1(t)$	$\frac{1}{s}$
derivátor	$y(t) = u'(t)$	$h(t) = \delta'(t)$	s
dopr. zpož.	$y(t) = u(t-D)$	$h(t) = \delta(t-D)$	e^{-Ds}
1.řád	$T\dot{y} + y = u$	$h(t) = 1(t)\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts+1}$

Laplaceova transformace (pokr.2)

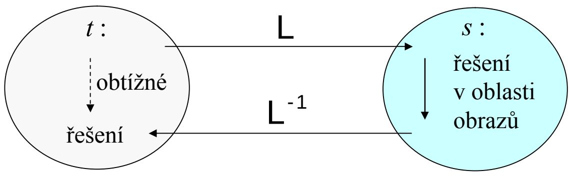
Laplaceova transformace je vhodná pro řešení mnoha různých úloh. Její použití spočívá v tom, že časové funkce transformujeme na jejich obrazy – funkce v proměnné s, manipulací s nimi vyřešíme daný problém v oblasti obrazů a poté se vrátíme inverzní Laplaceovou transformací do časové oblasti.

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt,$$

Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st}ds.$$

Inverzní Laplaceova transformace



Inverzní transformaci obvykle nepočítáme podle výše uvedeného vztahu, ale užíváme slovník Laplaceovy transformace (viz dále).

Laplaceova transformace (pokr.3)

Určení přenosu systému 1.řádu ze skalární diferenciální rovnice:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{T\dot{y}(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Laplaceování rovnice.

$$T\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Užíváme linearitu Laplaceova transformace.

$$TsY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)(Ts+1) = U(s)$$

Obrazy označujeme velkými písmeny; obraz derivace viz pozn. dole.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

Přenos systému je podíl obrazu výstupu ku obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách.

Obraz derivace funkce:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = \int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-st}dt = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = -y(0^+) + sY(s) = sY(s)$$

Laplaceova transformace (pokr.4)

Řešení diferenciální rovnice 1.řádu pomocí Laplaceovy transformace:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = 1(t), \quad y(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{T\dot{y}(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\}$$ Laplaceování rovnice.

$$T\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\}$$ Užíváme linearitu Laplaceovy transformace.

$$TsY(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$$ Obraz fce 1(s) je 1/s.

$$Y(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$ Výsledný obraz rozložíme na parciální zlomky.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T}{Ts+1}\right\}$$ Návrat do časové oblasti.
Inverzní Lapl. transf. je též lineární.
Viz slovník Laplaceovy transformace.

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{T}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$ Výsledek - řešení dif. rovnice.

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s/a), \quad a > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s)$$

$$f(0^+) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sF(s)$$

Slovník (pokr.5)

Tabulka Laplaceových obrazů pro nejjednodušší funkce:

$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$